

Avaliação da Função de Fase de Henyey-Greenstein no Transporte Radiativo Unidimensional com Método ADO: Aplicações em Modelagem de Vegetações

Patricia Rodrigues Fortes^{1,2}, Arton Pereira Dorneles¹

¹Instituto Federal Farroupilha (IFFar) – Campus Frederico Westphalen
Curso de Bacharelado em Ciência da Computação
98.400-000, Frederico Westphalen, RS – Brasil

²Departamento de Engenharia e Tecnologia Ambiental
Universidade Federal de Santa Maria (UFSM)
98.400-000 – Frederico Westphalen, RS – Brasil

patricia@ufsm.br, artondorneles@gmail.com

Abstract. *This study applies the Analytical Discrete Ordinates Method (ADO) to the solution of the one-dimensional radiative transfer equation in vegetation canopies. The comparison between the analytical form of the Henyey–Greenstein phase function and its Legendre polynomial expansion showed that the truncated expansion ($L = 99$) accurately reproduces the exact values and that convergence is achieved for $N > 30$. The adoption of Python in the development of the ADO routines enabled an integrated structure and automated computation of the relevant quantities. The results demonstrate the method's efficiency and accuracy in the analysis of radiative transfer in optically thick and anisotropic vegetative media.*

Resumo. *Este estudo aplica o Método de Ordenadas Discretas Analítico (ADO) à solução da equação de transferência radiativa unidimensional em dosséis vegetais. A comparação entre a função de fase de Henyey–Greenstein em sua forma analítica e sua expansão em polinômios de Legendre mostrou que a expansão truncada ($L = 99$) reproduz adequadamente os valores exatos e que a convergência é alcançada quando $N > 30$. A adoção do Python na construção das rotinas ADO permitiu estruturar o procedimento de forma integrada e automatizar o cálculo das quantidades de interesse. Os resultados evidenciam a eficiência e a precisão do método na análise do transporte radiativo em meios vegetativos opticamente espessos e anisotrópicos.*

1. Introdução

A equação de transporte descreve o fluxo de partículas em um meio material, considerando sua variação espacial, direcional, energética e temporal, bem como as interações com a matéria [Case and Zweifel 1967, Duderstadt and Martin 1979]. Na ausência de interações entre as partículas, como no caso de fótons da radiação eletromagnética, ela se reduz à forma linear denominada Equação de Transferência Radiativa (ETR), amplamente utilizada na modelagem de fenômenos radiativos em meios contínuos [Chandrasekhar 1960, Modest 2013].

A ETR reúne os mecanismos físicos que influenciam o campo de radiação: absorção, que atenua a intensidade; emissão, que introduz radiação proveniente do meio; e espalhamento, que redireciona os fótons incidentes [Liou 2002, Groff 2023]. Durante a propagação, a radiação pode ser atenuada, ter sua direção modificada ou sofrer mudança de frequência, conforme as propriedades ópticas do material. Esses processos moldam a distribuição angular e espectral da radiação e permitem uma representação precisa do transporte radiativo em áreas como astrofísica, engenharia térmica, óptica biomédica e ciências ambientais [Conci et al. 2008].

A solução da ETR é determinada pelas propriedades ópticas do meio, como os coeficientes de absorção e espalhamento e a função de fase, responsável pela redistribuição angular da radiação espalhada [Siewert 2002]. Em meios opticamente espessos, a alta densidade favorece múltiplas interações, de modo que absorção e emissão se tornam mais influentes; em meios opticamente finos, o espalhamento tende a desempenhar papel mais destacado [Modest 2013]. No âmbito ambiental, a transferência radiativa orienta processos como o balanço energético da atmosfera, a interação da radiação solar com gases e aerossóis e a troca de energia em ecossistemas vegetados [Liou 2002, Monteith and Unsworth 2013, IPCC 2021], elementos fundamentais para a modelagem climática, o sensoriamento remoto e a análise de mudanças ambientais [Cromianski et al. 2017, Shultis and Myneni 1988].

Entre os parâmetros ópticos que estruturam a ETR, a função de fase é relevante por caracterizar a distribuição angular do espalhamento [Siewert 2002, Myneni et al. 1995]. Em meios vegetados, a organização foliar favorece o espalhamento anisotrópico, o que torna a seleção apropriada dessa função indispensável para garantir precisão na modelagem radiativa [Clements and Özişik 1983]. Ao definir a probabilidade de redirecionamento da radiação incidente, a função de fase influencia diretamente a refletância, a absorção e a transmitância do dossel.

A função de Henyey–Greenstein [Siewert 2002] é uma das representações utilizadas para descrever o espalhamento anisotrópico em meios vegetados, sobretudo quando há predominância de espalhamento para frente. Depende de um único parâmetro e permite uma descrição compacta da redistribuição angular, podendo ser expressa tanto na forma analítica fechada quanto pela expansão em polinômios de Legendre. Embora matematicamente equivalentes, a expansão truncada pode gerar diferenças numéricas, o que motiva a comparação entre as duas representações.

Na solução da ETR, o Método de Ordenadas Discretas Analítico (ADO) gera uma formulação que fornece uma expressão analítica para a dependência espacial da intensidade após a discretização da variável direcional. A equação é convertida em um sistema acoplado de equações diferenciais ordinárias resolvido com técnicas de álgebra linear e aplicação das condições de contorno [Barichello and Siewert 1999, Barichello 2011]. Sua estrutura independe da forma funcional da função de fase, permitindo modelar meios com diferentes padrões de espalhamento. Como utiliza apenas os pontos positivos da quadratura no cálculo dos autovalores, o ADO reduz pela metade a dimensão efetiva dos sistemas, favorecendo a eficiência computacional. A literatura demonstra seu bom desempenho em meios unidimensionais [Groff 2023, Cromianski et al. 2017] e em geometrias mais gerais [Rui et al. 2020, Mentges 2025].

Neste trabalho, analisa-se como a escolha da representação da função de fase influencia a solução da ETR unidimensional em meios vegetados, empregando o método ADO com implementação em Python [Van Rossum and Drake 2001]. Compara-se a forma analítica da função de Henyey–Greenstein [Siewert 2002] e sua expansão truncada em polinômios de Legendre [Barichello 2011], avaliando seus efeitos sobre grandezas como densidade de radiação, transmitância e refletância do dossel. O estudo inclui o desenvolvimento computacional em Python, explorando recursos de álgebra linear e manipulação matricial para automatizar a formulação e a solução analítica do ADO. Esse enfoque permite validar os modelos radiativos e evidenciar o potencial de linguagens de alto nível na implementação de métodos analíticos aplicados a processos físicos.

2. Formulação do Problema

Considera-se um problema estacionário, monoenergético e unidimensional, em que a intensidade radiativa depende apenas da profundidade óptica τ (variável espacial) e do cosseno direcional $\mu = \cos \theta$ (μ é a variável angular), em que θ é o ângulo entre a direção de propagação e a normal ao meio. Em meio plano-paralelo homogêneo, com propriedades ópticas constantes, a ETR assume a forma [Barichello 2011]:

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} + I(\tau, \mu) = \frac{\varpi}{2} \int_{-1}^1 p(\mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu', \quad (1)$$

onde $I(\tau, \mu)$ denota a intensidade na profundidade óptica $\tau \in (0, \tau_0)$, ϖ é o albedo de simples espalhamento e $p(\mu, \mu')$ é a função de fase que descreve a redistribuição angular da radiação. O termo integral expressa a contribuição da radiação espalhada das direções μ' para μ . Em meios vegetados, a anisotropia estrutural favorece padrões não isotrópicos, como o espalhamento para frente, o que exige caracterização adequada de $p(\mu, \mu')$ para garantir a consistência da modelagem matemática da transferência radiativa.

Nesta formulação a emissão térmica é tomada como desprezível diante da radiação solar direta. Esta incide na superfície em $\tau = 0$ com direção fixa $\mu > 0$, enquanto a radiação difusa pode se propagar em todas as direções $\mu \in [-1, 1]$. Assume-se homogeneidade horizontal, de modo que as propriedades ópticas variam apenas com τ . A Figura 1 ilustra essa configuração: direções com $\mu > 0$ indicam propagação no sentido do aumento de profundidade óptica ($0 \rightarrow \tau_0$), enquanto $\mu < 0$ corresponde ao sentido inverso ($\tau_0 \rightarrow 0$). Os valores $\mu = \pm 1$ referem-se à propagação normal às superfícies, e $\mu = 0$ à propagação tangencial.

A equação (1) é resolvida com as condições de contorno:

$$I(0, \mu) = F_1(\mu) + \rho_1^s I(0, -\mu) + 2\rho_1^d \int_0^1 I(0, -\mu') \mu' d\mu', \quad (2)$$

$$I(\tau_0, -\mu) = F_2(\mu) + \rho_2^s I(\tau_0, \mu) + 2\rho_2^d \int_0^1 I(\tau_0, \mu') \mu' d\mu', \quad (3)$$

para $\mu \in (0, 1]$. Nestas expressões, $F_1(\mu)$ e $F_2(\mu)$ representam a radiação incidente nas fronteiras, enquanto ρ_i^s e ρ_i^d ($i = 1, 2$) são os coeficientes de reflexão especular e difusa.

Para resolver o problema, utiliza-se o Método de Ordenadas Discretas Analítico (ADO) [Barichello and Siewert 1999], que converte a ETR em um sistema acoplado de

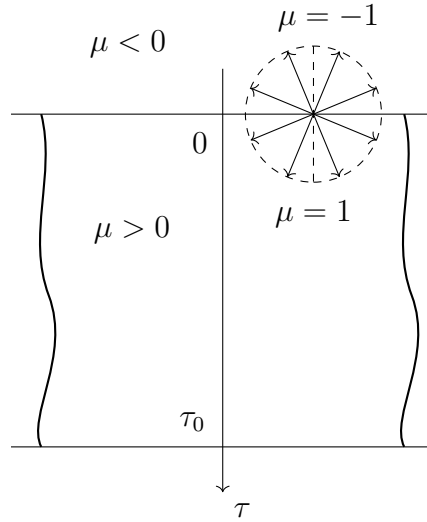


Figura 1. Esquema da propagação da radiação em um meio plano-paralelo unidimensional. Fonte: Adaptado de [Barichello 2011].

equações diferenciais ordinárias com solução analítica em função da profundidade óptica. Neste estudo, a função de fase $p(\mu, \mu')$ é tratada em duas representações: a forma analítica da função de Henyey–Greenstein [Siewert 2002] e sua expansão truncada em polinômios de Legendre [Barichello 2011].

A partir das soluções obtidas, analisam-se grandezas fundamentais do transporte radiativo. A densidade de radiação, definida como a integral angular da intensidade, expressa a energia radiante total por unidade de volume [Barichello 2011]:

$$\rho(\tau) = \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) d\mu. \quad (4)$$

A reflectância é dada pela razão entre a energia refletida e a energia incidente na superfície superior [Clements and Özışık 1983]:

$$R = \frac{\int_0^1 \mu I(0, -\mu) d\mu}{\int_0^1 \mu I(0, \mu) d\mu}. \quad (5)$$

De forma similar, a transmitância corresponde à fração de energia que atravessa o meio e emerge pela superfície inferior [Clements and Özışık 1983]:

$$T = \frac{\int_0^1 \mu I(\tau_0, \mu) d\mu}{\int_0^1 \mu I(0, \mu) d\mu}. \quad (6)$$

Essas quantidades permitem avaliar o efeito da representação da função de fase sobre os resultados do modelo radiativo em dosséis vegetados.

2.1. Função de fase por expansão truncada em polinômios de Legendre

A expansão truncada em polinômios de Legendre é amplamente empregada para representar o termo $p(\mu, \mu')$ na equação (1) [Cromianski et al. 2017, Picca and Furfaro 2013, Barichello 2011]. Neste trabalho, utilizam-se coeficientes β_l expressos em função do fator de assimetria g , também presente na forma analítica da função de Henyey–Greenstein [Siewert 2002]. Assim, a função de fase é escrita como

$$p(\mu, \mu') = \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu) P_l(\mu'), \quad (7)$$

onde $P_l(\mu)$ são os polinômios de Legendre definidos em $[-1, 1]$. Os coeficientes são dados por

$$\beta_l = (2l + 1)g^l, \quad (8)$$

para $l = 0, 1, \dots, L$. O truncamento em L ajusta a precisão da representação conforme o grau de anisotropia do meio.

Com essa formulação da função de fase, a equação (1) torna-se [Barichello 2011]:

$$\mu \frac{\partial I(\tau, \mu)}{\partial \tau} + I(\tau, \mu) = \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu) \int_{-1}^1 P_l(\mu') I(\tau, \mu') d\mu'. \quad (9)$$

Utilizando a propriedade de paridade dos polinômios de Legendre, $P_l(-\mu') = (-1)^l P_l(\mu')$, reescreve-se o termo integral da equação (9):

$$\mu \frac{\partial I(\tau, \mu)}{\partial \tau} + I(\tau, \mu) = \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu) \int_0^1 P_l(\mu') [I(\tau, \mu') + (-1)^l I(\tau, -\mu')] d\mu'. \quad (10)$$

Logo, a versão pelo método ADO da equação (10) pode ser expressa como um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, para $i = 1, 2, \dots, N$, na forma

$$\mu_i \frac{d}{d\tau} I(\tau, \mu_i) + I(\tau, \mu_i) = \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_i) \sum_{k=1}^N w_k P_l(\mu_k) [I(\tau, \mu_k) + (-1)^l I(\tau, -\mu_k)] \quad (11)$$

$$-\mu_i \frac{d}{d\tau} I(\tau, -\mu_i) + I(\tau, -\mu_i) = \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_i) \sum_{k=1}^N w_k P_l(\mu_k) [I(\tau, -\mu_k) + (-1)^l I(\tau, \mu_k)], \quad (12)$$

sendo μ_k e w_k os respectivos nós e pesos do esquema de quadratura, com N pontos, escolhido conforme os requisitos do problema, definido sob o intervalo $(0, 1]$.

Buscando resolver o sistema anterior, supõe-se uma solução escrita em termos de uma função exponencial

$$I(\tau, \pm\mu_i) = \phi(\nu, \pm\mu_i) e^{-\tau/\nu}. \quad (13)$$

Substituindo a equação (13) nas equações (11) e (12) obtém-se respectivamente

$$\left(\mathbf{I}_N - \frac{1}{\nu} \mathbf{M} \right) \Phi_+(\nu) = \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l \mathbf{\Pi}(l) \mathbf{\Pi}(l)^T \mathbf{W} [\Phi_+(\nu) + (-1)^l \Phi_-(\nu)] \quad (14)$$

$$\left(\mathbf{I}_N + \frac{1}{\nu}\mathbf{M}\right)\Phi_-(\nu) = \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l \Pi(l) \Pi(l)^T \mathbf{W} [\Phi_-(\nu) + (-1)^l \Phi_+(\nu)], \quad (15)$$

onde $\mathbf{I}_N$ é a matriz identidade de ordem $N \times N$, T denota a operação transposta,

$$\Phi_+(\nu) = \begin{bmatrix} \phi(\nu, \mu_1) \\ \phi(\nu, \mu_2) \\ \vdots \\ \phi(\nu, \mu_N) \end{bmatrix}, \quad \Phi_-(\nu) = \begin{bmatrix} \phi(\nu, -\mu_1) \\ \phi(\nu, -\mu_2) \\ \vdots \\ \phi(\nu, -\mu_N) \end{bmatrix},$$

$$\Pi(l) = [P_l(\mu_1) \ P_l(\mu_2) \ \dots \ P_l(\mu_N)]^T, \quad \mathbf{M} = \text{diag}\{\mu_1, \dots, \mu_N\}, \quad \mathbf{W} = \text{diag}\{w_1, \dots, w_N\}.$$

Somando as equações (14) e (15) obtém-se

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{I}_N - \frac{1}{\nu}\mathbf{M}\right)\Phi_+(\nu) + \left(\mathbf{I}_N + \frac{1}{\nu}\mathbf{M}\right)\Phi_-(\nu) = \\ &\frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l \Pi(l) \Pi(l)^T \mathbf{W} [\Phi_+(\nu) + (-1)^l \Phi_+(\nu) + \Phi_-(\nu) + (-1)^l \Phi_-(\nu)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Definindo os vetores $N \times 1$:

$$\mathbf{U} = \Phi_+(\nu) + \Phi_-(\nu) \quad (17) \quad \mathbf{V} = \Phi_+(\nu) - \Phi_-(\nu) \quad (18)$$

passa-se a reescrever a equação (16) na forma

$$\mathbf{U} - \frac{1}{\nu}\mathbf{M}\mathbf{V} = \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l \Pi(l) \Pi(l)^T \mathbf{W} [1 + (-1)^l] \mathbf{U}$$

ou

$$\left(\mathbf{I}_N - \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l \Pi(l) \Pi(l)^T \mathbf{W} [1 + (-1)^l]\right) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{U} = \frac{1}{\nu} \mathbf{M} \mathbf{V}. \quad (19)$$

Partindo da equação (19), define-se:

$$\mathbf{X} = \mathbf{M} \mathbf{U}, \quad (20) \quad \mathbf{Y} = \mathbf{M} \mathbf{V}, \quad (21)$$

$$\mathbf{E} = \left(\mathbf{I}_N - \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l \Pi(l) \Pi(l)^T \mathbf{W} [1 + (-1)^l]\right) \mathbf{M}^{-1},$$

com isso, obtém-se

$$\mathbf{E} \mathbf{X} = \frac{1}{\nu} \mathbf{Y}. \quad (22)$$

Analogamente, subtraindo a equação (14) de (15), chega-se à expressão

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{I}_N - \frac{1}{\nu}\mathbf{M}\right)\Phi_+(\nu) - \left(\mathbf{I}_N + \frac{1}{\nu}\mathbf{M}\right)\Phi_-(\nu) = \\ &\frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l \Pi(l) \Pi(l)^T \mathbf{W} [\Phi_+(\nu) - (-1)^l \Phi_+(\nu) - \Phi_-(\nu) + (-1)^l \Phi_-(\nu)], \end{aligned}$$

e empregando as equações (17) e (18), a expressão anterior assume a forma:

$$\mathbf{V} - \frac{1}{\nu} \mathbf{M} \mathbf{U} = \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l \mathbf{\Pi}(l) \mathbf{\Pi}(l)^T \mathbf{W} [1 - (-1)^l] \mathbf{V}$$

ou

$$\left(\mathbf{I}_N - \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l \mathbf{\Pi}(l) \mathbf{\Pi}(l)^T \mathbf{W} [1 - (-1)^l] \right) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{V} = \frac{1}{\nu} \mathbf{M} \mathbf{U}. \quad (23)$$

Assim, a equação (23) pode ser escrita como

$$\mathbf{F} \mathbf{Y} = \frac{1}{\nu} \mathbf{X} \quad (24)$$

com

$$\mathbf{F} = \left(\mathbf{I}_N - \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l \mathbf{\Pi}(l) \mathbf{\Pi}(l)^T \mathbf{W} [1 - (-1)^l] \right) \mathbf{M}^{-1}.$$

Para obter um problema de autovalores associado à solução do sistema, prossegue-se isolando $\mathbf{Y}$ na equação (22), para em seguida substituí-la na equação (24). Dessa forma, chega-se à seguinte formulação:

$$(\mathbf{F} \mathbf{E}) \mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}, \text{ onde } \lambda = \frac{1}{\nu^2}. \quad (25)$$

Prosseguindo com a manipulação algébrica, a equação (22) pode ser reescrita como:

$$\nu \mathbf{E} \mathbf{X} = \mathbf{Y}, \quad (26)$$

e adicionando-se $\mathbf{X}$ em ambos os lados da equação (26), chega-se à seguinte expressão:

$$(\mathbf{I}_N + \nu \mathbf{E}) \mathbf{X} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}. \quad (27)$$

Com a substituição das equações (20) e (21) no lado direito da equação (27), resulta:

$$(\mathbf{I}_N + \nu \mathbf{E}) \mathbf{X} = \mathbf{M} (\mathbf{U} + \mathbf{V}),$$

e dessa forma, a partir das equações (17) e (18), obtém-se:

$$(\mathbf{I}_N + \nu_j \mathbf{E}) \mathbf{X}(\nu_j) = 2 \mathbf{M} \mathbf{\Phi}_+(\nu_j)$$

que pode ser reescrita na forma

$$\mathbf{\Phi}_+(\nu_j) = \frac{1}{2} \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{I}_N + \nu_j \mathbf{E}) \mathbf{X}(\nu_j). \quad (28)$$

Pelo mesmo raciocínio, subtraindo $\mathbf{X}$ de ambos os lados da equação (26), obtém-se:

$$(-\mathbf{I}_N + \nu \mathbf{E}) \mathbf{X} = -\mathbf{X} + \mathbf{Y}. \quad (29)$$

Substituindo as equações (20) e (21) no lado direito da equação (29), resulta em:

$$(\mathbf{I}_N - \nu \mathbf{E}) \mathbf{X} = \mathbf{M} (\mathbf{U} - \mathbf{V}),$$

que, através das equações (17) e (18), pode ser escrita como

$$(\mathbf{I}_N - \nu_j \mathbf{E}) \mathbf{X}(\nu_j) = 2\mathbf{M}\Phi_-(\nu_j)$$

ou ainda

$$\Phi_-(\nu_j) = \frac{1}{2}\mathbf{M}^{-1} (\mathbf{I}_N - \nu_j \mathbf{E}) \mathbf{X}(\nu_j). \quad (30)$$

Sendo assim, com os autovalores e autovetores calculados a partir da equação (25), e com as soluções elementares definidas nas equações (28) e (30), torna-se possível expressar, em forma matricial

$$\mathbf{I}_{\pm}(\tau) = (I(\tau, \pm\mu_1) I(\tau, \pm\mu_2) \dots I(\tau, \pm\mu_N))^T,$$

a solução da equação (9) na forma

$$\mathbf{I}_{\pm}(\tau) = \sum_{j=1}^N \left[A_j \Phi_{\pm}(\nu_j) e^{-\tau/\nu_j} + B_j \Phi_{\mp}(\nu_j) e^{-(\tau_0 - \tau)/\nu_j} \right], \quad (31)$$

onde τ_0 representa a espessura óptica do problema. Observa-se que a solução obtida encontra-se expressa de forma explícita em termos da variável espacial.

Para completar a construção da solução, torna-se necessário determinar as constantes A_j e B_j , para $j = 1, \dots, N$. Tais constantes são determinadas por meio da substituição da equação (31) nas condições de contorno dadas pelas equações (2) e (3), o que resulta em um sistema linear de ordem $2N \times 2N$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \left[A_j \Phi_+(\nu_j) + B_j \Phi_-(\nu_j) e^{-\tau_0/\nu_j} \right] - \rho_1^s \sum_{j=1}^N \left[A_j \Phi_-(\nu_j) + B_j \Phi_+(\nu_j) e^{-\tau_0/\nu_j} \right] \\ - 2\rho_1^d \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N w_k \mu_k \left[A_j \phi(\nu_j, -\mu_k) + B_j \phi(\nu_j, \mu_k) e^{-\tau_0/\nu_j} \right] = \mathbf{F}_1(\mu_i) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \left[A_j \Phi_-(\nu_j) e^{-\tau_0/\nu_j} + B_j \Phi_+(\nu_j) \right] - \rho_2^s \sum_{j=1}^N \left[A_j \Phi_+(\nu_j) e^{-\tau_0/\nu_j} + B_j \Phi_-(\nu_j) \right] \\ - 2\rho_2^d \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N w_k \mu_k \left[A_j \phi(\nu_j, \mu_k) e^{-\tau_0/\nu_j} + B_j \phi(\nu_j, -\mu_k) \right] = \mathbf{F}_2(\mu_i), \end{aligned} \quad (33)$$

para $i = 1, \dots, N$ e $\mu \in (0, 1]$, sendo que nestas equações as expressões vetoriais $\mathbf{F}_1(\mu_i)$ e $\mathbf{F}_2(\mu_i)$ possuem seus componentes definidos em função da radiação incidente (conhecida), $F_1(\mu)$ e $F_2(\mu)$, respectivamente.

Com as constantes A_j e B_j definidas pelas condições de contorno, obtém-se a solução formal da equação de transferência radiativa com a função de fase expandida em polinômios de Legendre, o que possibilita calcular densidade de radiação, refletância e transmitância a partir da solução discretizada em profundidade óptica.

2.2. Função de Fase de Henyey-Greenstein Analítica

Nesta seção, a aproximação da função de fase baseada em expansões truncadas em polinômios de Legendre (equação (7)) é substituída pela função de fase de Henyey-Greenstein (HG) em sua forma analítica [Siewert 2002, Mentges 2025].

Considerando a simetria azimutal imposta na formulação do problema unidimensional [Barichello 2011], a função de fase do termo de espalhamento é definida pela integral da função de fase tridimensional sobre o ângulo azimutal ϕ' , conforme a equação a seguir [Chandrasekhar 1960]:

$$p(\mu, \mu') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\cos \Theta) d\phi' \quad (34)$$

onde $p(\cos \Theta)$ é a função de fase de Henyey-Greenstein analítica, dada por:

$$p(\cos \Theta) = (1 - g^2)(1 + g^2 - 2g \cos(\Theta))^{-3/2} \quad (35)$$

sendo $\cos \Theta$ o cosseno do ângulo de espalhamento entre as direções de incidência e espalhamento (μ', ϕ') e (μ, ϕ) , respectivamente:

$$\cos \Theta = \mu\mu' + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu'^2} \cos(\phi' - \phi). \quad (36)$$

Nessa expressão, ϕ é um ângulo arbitrário e ϕ' é a variável de integração. Em virtude da simetria azimutal do problema unidimensional, a intensidade radiativa $I(\tau, \mu)$ independe de ϕ , o que permite fixar $\phi = 0$ sem perda de generalidade.

Em conformidade com a formulação do método ADO, o termo de espalhamento da equação (1) é reescrito pela divisão do domínio de integração angular $[-1, 1]$ em duas partes simétricas $[0, 1]$. Assim, o termo assume a seguinte expressão:

$$\int_{-1}^1 p(\mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu' = \int_0^1 \left[p(\mu, \mu') I(\tau, \mu') + p(\mu, -\mu') I(\tau, -\mu') \right] d\mu'. \quad (37)$$

Dessa maneira, a equação (1) passa a ser escrita na forma

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} + I(\tau, \mu) = \frac{\varpi}{2} \int_0^1 \left[p(\mu, \mu') I(\tau, \mu') + p(\mu, -\mu') I(\tau, -\mu') \right] d\mu'. \quad (38)$$

Aplicando-se o método ADO à equação (38), obtém-se um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, válido para $i = 1, 2, \dots, N$:

$$\mu_i \frac{dI(\tau, \mu_i)}{d\tau} + I(\tau, \mu_i) = \frac{\varpi}{2} \sum_{k=1}^N w_k \left[p(\mu_i, \mu_k) I(\tau, \mu_k) + p(\mu_i, -\mu_k) I(\tau, -\mu_k) \right], \quad (39)$$

$$-\mu_i \frac{dI(\tau, -\mu_i)}{d\tau} + I(\tau, -\mu_i) = \frac{\varpi}{2} \sum_{k=1}^N w_k \left[p(-\mu_i, \mu_k) I(\tau, \mu_k) + p(-\mu_i, -\mu_k) I(\tau, -\mu_k) \right]. \quad (40)$$

Aqui, w_k e μ_k denotam, respectivamente, os pesos e os nós de uma quadratura arbitrária com N pontos definida em $(0, 1]$. Ressalta-se que, nesta etapa da formulação, o esquema de quadratura permanece genérico, sendo a sua escolha necessária apenas quando se deseja obter resultados numéricos. As quantidades $I(\tau, \pm\mu_k)$ correspondem às intensidades da radiação nas direções discretizadas.

Para proceder à resolução, considera-se uma solução separável de caráter exponencial:

$$I(\tau, \pm\mu_i) = \phi(\nu, \pm\mu_i)e^{-\tau/\nu}, \quad (41)$$

cujas substituições nas equações discretizadas (39) e (40) conduz, para $i = 1, \dots, N$, ao sistema algébrico:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{\nu}\mu_i\right) \phi(\nu, \mu_i) &= \frac{\varpi}{2} \sum_{k=1}^N w_k \left[p(\mu_i, \mu_k) \phi(\nu, \mu_k) + p(\mu_i, -\mu_k) \phi(\nu, -\mu_k) \right], \quad (42) \\ \left(1 + \frac{1}{\nu}\mu_i\right) \phi(\nu, -\mu_i) &= \frac{\varpi}{2} \sum_{k=1}^N w_k \left[p(-\mu_i, \mu_k) \phi(\nu, \mu_k) + p(-\mu_i, -\mu_k) \phi(\nu, -\mu_k) \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Observando-se a dependência da função de Henyey-Greenstein (??) no produto $\mu\mu'$, tem-se as seguintes relações de simetria:

$$p(-\mu_i, \mu_k) = p(\mu_i, -\mu_k), \quad p(-\mu_i, -\mu_k) = p(\mu_i, \mu_k).$$

Tais propriedades permitem reescrever o sistema (42)–(43) em forma matricial compacta:

$$\left(\mathbf{I}_N - \frac{1}{\nu}\mathbf{M}\right) \Phi_+(\nu) = \frac{\varpi}{2} \left[\left(\mathbf{P}^{(+,+)}\mathbf{W}\right) \Phi_+(\nu) + \left(\mathbf{P}^{(+,-)}\mathbf{W}\right) \Phi_-(\nu) \right], \quad (44)$$

$$\left(\mathbf{I}_N + \frac{1}{\nu}\mathbf{M}\right) \Phi_-(\nu) = \frac{\varpi}{2} \left[\left(\mathbf{P}^{(+,-)}\mathbf{W}\right) \Phi_+(\nu) + \left(\mathbf{P}^{(+,+)}\mathbf{W}\right) \Phi_-(\nu) \right] \quad (45)$$

em que $\mathbf{I}_N$ é a matriz identidade $N \times N$, e as matrizes e vetores usados acima são definidos como segue:

$$\mathbf{P}^{(+,+)} = \begin{bmatrix} p(\mu_1, \mu_1) & p(\mu_1, \mu_2) & \dots & p(\mu_1, \mu_N) \\ p(\mu_2, \mu_1) & p(\mu_2, \mu_2) & \dots & p(\mu_2, \mu_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p(\mu_N, \mu_1) & p(\mu_N, \mu_2) & \dots & p(\mu_N, \mu_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{(+,-)} = \begin{bmatrix} p(\mu_1, -\mu_1) & p(\mu_1, -\mu_2) & \dots & p(\mu_1, -\mu_N) \\ p(\mu_2, -\mu_1) & p(\mu_2, -\mu_2) & \dots & p(\mu_2, -\mu_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p(\mu_N, -\mu_1) & p(\mu_N, -\mu_2) & \dots & p(\mu_N, -\mu_N) \end{bmatrix}$$

$$\Phi_+(\nu) = \begin{bmatrix} \phi(\nu, \mu_1) \\ \phi(\nu, \mu_2) \\ \vdots \\ \phi(\nu, \mu_N) \end{bmatrix}, \quad \Phi_-(\nu) = \begin{bmatrix} \phi(\nu, -\mu_1) \\ \phi(\nu, -\mu_2) \\ \vdots \\ \phi(\nu, -\mu_N) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \text{diag}\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N\}, \quad \mathbf{W} = \text{diag}\{w_1, w_2, \dots, w_N\}.$$

Com o intuito de simplificar a manipulação do sistema matricial, introduzem-se os vetores $N \times 1$ combinados:

$$\mathbf{U} = \Phi_+(\nu) + \Phi_-(\nu) \quad (46) \quad \mathbf{V} = \Phi_+(\nu) - \Phi_-(\nu). \quad (47)$$

Somando as expressões (44) e (45), obtém-se

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{I}_N - \frac{1}{\nu} \mathbf{M} \right) \Phi_+(\nu) + \left(\mathbf{I}_N + \frac{1}{\nu} \mathbf{M} \right) \Phi_-(\nu) \\ &= \frac{\varpi}{2} \left[(\mathbf{P}^{(+,+)} + \mathbf{P}^{(+,-)}) \mathbf{W} \Phi_+(\nu) + (\mathbf{P}^{(+,+)} + \mathbf{P}^{(+,-)}) \mathbf{W} \Phi_-(\nu) \right], \end{aligned} \quad (48)$$

a qual, em termos de $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$, assume a forma

$$\mathbf{U} - \frac{1}{\nu} \mathbf{M} \mathbf{V} = \frac{\varpi}{2} (\mathbf{P}^{(+,+)} + \mathbf{P}^{(+,-)}) \mathbf{W} \mathbf{U}. \quad (49)$$

De maneira análoga, ao considerar a diferença entre (44) e (45), resulta

$$\mathbf{V} - \frac{1}{\nu} \mathbf{M} \mathbf{U} = \frac{\varpi}{2} (\mathbf{P}^{(+,+)} - \mathbf{P}^{(+,-)}) \mathbf{W} \mathbf{V}. \quad (50)$$

Para prosseguir, introduzem-se as variáveis auxiliares

$$\mathbf{X} = \mathbf{M} \mathbf{U} \quad (51) \quad \mathbf{Y} = \mathbf{M} \mathbf{V} \quad (52)$$

que permitem reescrever (49) e (50) como

$$\mathbf{E} \mathbf{X} = \frac{1}{\nu} \mathbf{Y} \quad (53) \quad \mathbf{F} \mathbf{Y} = \frac{1}{\nu} \mathbf{X} \quad (54)$$

sendo as matrizes $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$ definidas por

$$\mathbf{E} = \mathbf{M}^{-1} - \frac{\varpi}{2} (\mathbf{P}^{(+,+)} + \mathbf{P}^{(+,-)}) \mathbf{W} \mathbf{M}^{-1}, \quad (55)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{M}^{-1} - \frac{\varpi}{2} (\mathbf{P}^{(+,+)} - \mathbf{P}^{(+,-)}) \mathbf{W} \mathbf{M}^{-1}. \quad (56)$$

Convém destacar que, uma vez definidas as matrizes $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$, todo o desenvolvimento decorrente do uso da função de fase de Henyey–Greenstein analítica passa a reproduzir integralmente a estrutura formal apresentada na formulação expandida. As etapas posteriores, incluindo a definição da matriz de autovalores e autovetores em (25), a escrita da solução geral em (31) e o sistema linear associado às condições de contorno, permanecem exatamente as mesmas equações já deduzidas na seção anterior.

3. Densidade de Radiação, Reflectância e Transmitância

Com a intensidade expressa pela solução ADO, seja pela expansão em polinômios de Legendre ou pela forma analítica de Henyey–Greenstein, obtém-se diretamente a densidade de radiação, originalmente definida na equação (4), que passa ser escrita como:

$$\rho(\tau) = \sum_{j=1}^N \left[A_j e^{-\tau/\nu_j} + B_j e^{-(\tau_0 - \tau)/\nu_j} \right] \sum_{i=1}^N w_i [\phi(\nu_j, \mu_i) + \phi(\nu_j, -\mu_i)]. \quad (57)$$

A partir da mesma solução analítica, obtém-se também as expressões da reflectância e da transmitância, correspondentes ao fluxo emergente nas interfaces. Assim, a

reflectância dada em (5) torna-se:

$$R = 2 \sum_{i=1}^N w_i \mu_i \sum_{j=1}^N [A_j \phi(\nu_j, -\mu_i) + B_j \phi(\nu_j, \mu_i) e^{-\tau_0/\nu_j}]. \quad (58)$$

De modo análogo, a transmitância definida em (6) é escrita como:

$$T = 2 \sum_{i=1}^N w_i \mu_i \sum_{j=1}^N [A_j \phi(\nu_j, \mu_i) e^{-\tau_0/\nu_j} + B_j \phi(\nu_j, -\mu_i)]. \quad (59)$$

4. Implementação da Formulação ADO em Python

A formulação ADO exige a definição de parâmetros essenciais ao cálculo de densidade de radiação, reflectância e transmitância. Neste estudo, a implementação foi realizada em Python [Van Rossum and Drake 2001], cuja sintaxe clara e conjunto de bibliotecas científicas, como NumPy [Harris et al. 2020] e SciPy [Virtanen et al. 2020], favorecem o desenvolvimento modular e a reprodutibilidade das simulações.

A etapa inicial consiste na escolha do esquema de quadratura para a discretização angular de μ , determinante para a precisão numérica. Adotou-se o método de Gauss–Legendre, reconhecido por sua estabilidade. Outro elemento central é a caracterização da função de fase $p(\mu, \mu')$, empregada aqui tanto em sua forma analítica quanto aproximada, ambas derivadas da expressão de Henyey–Greenstein. Entre seus parâmetros destaca-se o fator de assimetria g , cujos valores variam conforme a vegetação e a faixa espectral, situando-se entre 0,631 e 0,642 segundo Myneni et al. [Myneni et al. 1995]. Em dosséis densos, valores maiores, como $g = 0,85$, têm sido utilizados [Barker and Marshak 2001], enquanto $g = 0$ representa o caso isotrópico [Mentges 2025, Binzoni et al. 2006].

Uma vez definidos os parâmetros de entrada, o algoritmo prossegue com a construção das matrizes associadas ao método ADO. As raízes e os pesos obtidos pela quadratura são empregados no cálculo das matrizes $\mathbf{F}$ e $\mathbf{E}$. A partir dessas matrizes, determinam-se os autovalores e autovetores por meio da função *eig()*, a qual integra o módulo *numpy.linalg* e constitui o procedimento tradicional para o cálculo simultâneo desses elementos em uma matriz quadrada. Com esses resultados, definem-se as funções Φ_+ e Φ_- , empregadas na montagem da matriz $\mathbf{S}$, que incorpora as condições de contorno do problema. A resolução do sistema linear é realizada por meio de fatoração LU, implementada com as rotinas *scipy.linalg.lu_factor* e *scipy.linalg.lu_solve*.

A avaliação da função de fase na formulação analítica requer o cálculo da integral azimutal da equação (37), resolvida por uma quadratura de Gauss–Legendre implementada diretamente no código, utilizando as raízes e pesos já gerados e o mapeamento apropriado do domínio. Paralelamente, a forma expandida foi calculada pela série truncada de polinômios de Legendre, de modo vetorizado com NumPy [Harris et al. 2020]. A estrutura modular das funções assegurou rastreabilidade e permitiu verificar cada etapa da solução de forma independente.

Embora a integral da equação (37) pudesse ser avaliada por rotinas do SciPy, como *quad* ou *fixed_quad*, sua aplicação exigiria recomputar nós e pesos a cada chamada,

tornando o processo mais oneroso. O uso direto da quadratura com raízes e pesos já avaliados mostrou-se, assim, mais eficiente e compatível com as demandas do método.

O fluxo completo de cada uma das duas implementações é representado pelo pseudocódigo a seguir:

1: Entrada:

N : número de pontos de Gauss

L : ordem de expansão

ϖ : albedo de espalhamento

g : coeficiente de assimetria

τ_0 : comprimento óptico

caso: definição das condições de contorno

2: Calcular raízes e pesos (Gauss–Legendre)

3: Ordenar raízes e pesos da quadratura

4: Mapear os valores ordenados para o intervalo adequado

5: Formar as matrizes que compõem a estrutura do método

6: Determinar autovalores e autovetores

7: Reordenar os autovalores e autovetores segundo os parâmetros característicos

8: Calcular as funções auxiliares

9: Construir a matriz do sistema linear associado às condições de contorno

10: Realizar a fatoração LU

11: Construir o vetor independente

12: Resolver o sistema linear

13: Calcular a densidade de radiação $\rho(\tau)$

14: Calcular a reflectância R

15: Calcular a transmitância T

16: Saída: densidade $\rho(\tau)$, coeficientes R e T

Por fim, a rotina principal de cada implementação foi configurada para gerar automaticamente um arquivo de saída no formato .txt, contendo os resultados numéricos dos elementos das matrizes, autovalores, autovetores, das grandezas físicas de interesse e o tempo computacional de execução dos cálculos.

4.1. Caso de Referência: Parâmetros e Condições de Contorno

A avaliação do desempenho da formulação ADO para diferentes representações da função de fase de Henyey–Greenstein toma como referência o problema discutido em [Barichello et al. 1997], resolvido pelo método dos Harmônicos Esféricos (P_N) que se caracteriza por uma expansão em polinômios associados de Legendre. Na referência, a densidade definida em (4) é calculada em um meio anisotrópico com $L = 99$, $\varpi = 0,99$ e $\tau_0 = 10$. As condições de contorno incluem reflexão especular e difusa, com $\rho_1^s = 0,1$, $\rho_1^d = 0,2$, $\rho_2^s = 0,3$ e $\rho_2^d = 0,4$. A radiação incidente nas fronteiras é descrita por

$$F_1(\mu) = \sqrt{1 - \mu^2} + \frac{1}{1 + \mu^2} + \mu \log(\mu) e^{-\mu}, \quad (60)$$

e

$$F_2(\mu) = 0. \quad (61)$$

Fisicamente, o problema descreve a propagação da radiação em um meio plano-paralelo denso, no qual o espalhamento domina a absorção. O elevado albedo de espalhamento ($\varpi = 0,99$) indica que quase toda a radiação incidente é redirecionada ao interagir com o meio, sendo apenas uma parcela mínima absorvida. Assim, a radiação permanece por longos trajetos dentro do domínio, submetendo-se a múltiplos eventos de espalhamento antes de emergir pelas fronteiras. A espessura óptica total $\tau_0 = 10$ reforça esse quadro, caracterizando um meio opticamente espesso, no qual a penetração da radiação é limitada [Krieger and Wolf 2020]. Na superfície superior ($\tau = 0$), o campo incidente $F_1(\mu)$ reúne componentes diretas e difusas, sendo parcialmente refletido segundo os coeficientes ρ_1^s e ρ_1^d . Na fronteira inferior ($\tau = \tau_0$), a inexistência de radiação incidente ($F_2(\mu) = 0$) combinada com a reflexão significativa (ρ_2^s e ρ_2^d) caracteriza uma superfície refletora que contribui para o fluxo ascendente.

A modelagem apresentada em [Barichello et al. 1997] para $N = 199$ foi reproduzida em [Cromianski et al. 2017] utilizando o método ADO já a partir de $N = 30$, com diferenças restritas à última casa decimal. Ambos os trabalhos empregaram a mesma função de fase do tipo Binomial [Siewert 2002], expressa por expansão em polinômios de Legendre, o que os torna diretamente comparáveis. Essa configuração, contudo, difere da adotada no presente estudo, inviabilizando a comparação numérica, uma vez que aqui se emprega a função de fase de Henyey–Greenstein.

As soluções obtidas para $N = 20, 30, 50$ e 80 estão reunidas na Tabela 1, evidenciando o comportamento convergente do método. Mantiveram-se $\varpi = 0,99$ e $L = 99$, em conformidade com as referências usadas, porém adotou-se $g = 0,85$, valor representativo de meios vegetativos [Barker and Marshak 2001] e não considerado por [Barichello et al. 1997] e [Cromianski et al. 2017], que utilizaram funções de fase distintas da de Henyey–Greenstein.

Tabela 1. Resultados de densidade para diferentes valores de N com comparação entre a expansão ($L = 99$) e a forma analítica da função de fase.

τ	$N = 20$		$N = 30$		$N = 50$		$N = 80$	
	Exp.	Anal.	Exp.	Anal.	Exp.	Anal.	Exp.	Anal.
0,0	2,72921	2,72987	2,72783	2,72779	2,72781	2,72781	2,72781	2,72781
1,0	2,26830	2,26914	2,26660	2,26654	2,26658	2,26658	2,26657	2,26657
2,0	2,06566	2,06662	2,06375	2,06368	2,06372	2,06372	2,06372	2,06372
3,0	1,91583	1,91688	1,91392	1,91369	1,91396	1,91396	1,91397	1,91397
4,0	1,79338	1,79448	1,79119	1,79116	1,79116	1,79116	1,79116	1,79116
5,0	1,68881	1,68954	1,68614	1,68611	1,68611	1,68611	1,68610	1,68610
6,0	1,59593	1,59702	1,59350	1,59350	1,59350	1,59350	1,59350	1,59350
7,0	1,51287	1,51402	1,51045	1,51045	1,51049	1,51049	1,51049	1,51049
8,0	1,43667	1,43780	1,43432	1,43430	1,43430	1,43430	1,43429	1,43429
9,0	1,36649	1,36749	1,36414	1,36413	1,36415	1,36415	1,36415	1,36415
10,0	1,26597	1,26701	1,26377	1,26371	1,26374	1,26374	1,26374	1,26374
Tempo (s)	0,189	0,573	0,227	1,507	0,570	6,658	1,495	29,839

A Tabela 1 evidencia que a expansão truncada da função de Henyey–Greenstein, com $L = 99$, reproduz os valores da formulação analítica com concordância de cinco casas decimais para $N > 30$, indicando que o truncamento adotado é adequado ao regime anisotrópico considerado. O refinamento da quadratura angular além de $N = 80$ não modifica os resultados, o que confirma a estabilidade numérica de ambas as representações

da função de fase. A Figura 2 mostra que, para $N = 30$, as curvas já se sobrepõem, tornando desnecessários valores mais elevados de N .

O aumento de N , entretanto, acarreta crescimento significativo no tempo de processamento. Para $N = 100$, obtiveram-se 2,450 s na expansão e 57,738 s na formulação analítica; para $N = 200$, os tempos alcançaram 13,219 s e 547,111 s. Esse comportamento decorre do custo associado à avaliação numérica da integral da função de fase, dada pela equação (37), calculada por quadratura de Gauss–Legendre.

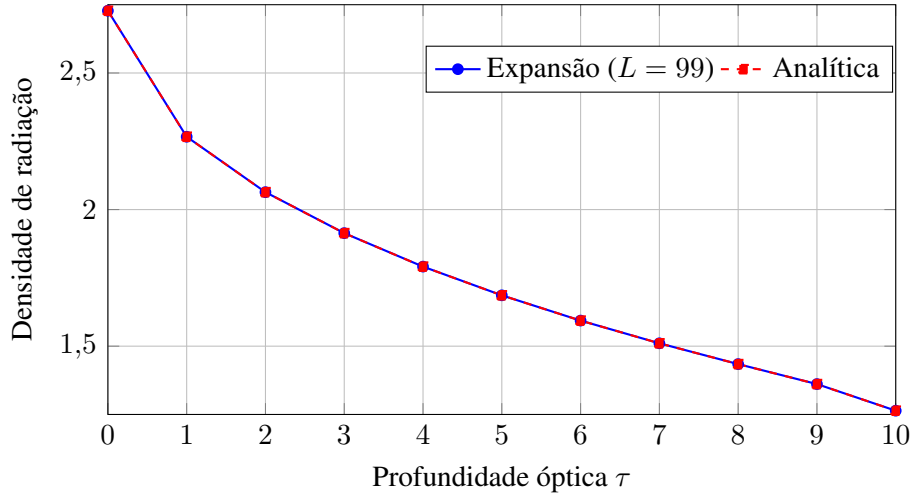


Figura 2. Perfis de densidade de radiação obtidos pela expansão truncada e pela formulação analítica para $N = 30$.

Fisicamente, os dados da Tabela 1 evidenciam o comportamento típico de um meio opticamente espesso e fortemente espalhador [Chandrasekhar 1960, Liou 2002]. Observa-se a redução gradual da densidade de radiação com o aumento de τ , resultado da atenuação da componente direta e do predomínio da difusa ao longo da profundidade. Esse perfil suave, característico de regimes com múltiplos espalhamentos e reflexões internas, concorda com os comportamentos descritos em [Barichello 2011] e [Cromianski et al. 2017].

5. Análise de Reflectância e Transmitância

Para a avaliação da reflectância e da transmitância, adotaram-se os conjuntos de parâmetros de [Clements and Özışık 1983] e [Cromianski et al. 2017], referentes às equações (58) e (59). Consideraram-se albedos $\varpi = 0,2, 0,8, 0,995$, fronteiras não refletoras e condições de radiação incidente $F_1(\mu) = 1$ e $F_2(\mu) = 0$.

Os três valores de ϖ permitem abranger desde um meio fortemente absorvedor ($\varpi = 0,2$), passando por um regime intermediário ($\varpi = 0,8$), até um meio quase conservativo ($\varpi = 0,995$), típico de múltiplas interações radiativas [Chandrasekhar 1960].

A isotropia no espalhamento, também analisada em [Cromianski et al. 2017] e [Clements and Özışık 1983], caracteriza sistemas em que a radiação é redistribuída uniformemente, resultando em função de fase constante. No presente trabalho, essa condição corresponde a $g = 0$ tanto na formulação analítica de Henyey–Greenstein quanto em sua

expansão em polinômios de Legendre, caso em que apenas o termo de ordem zero permanece ($L = 0$).

Na referência [Cromianski et al. 2017], a função de fase Binomial [Siewert 2002] também se reduz ao termo inicial no regime isotrópico, eliminando qualquer dependência angular. Assim, embora as funções de fase adotadas possuam formulações distintas, todas convergem para a mesma estrutura matemática quando $g = 0$. Essa equivalência assegura que o método ADO trate sistemas análogos, justificando a concordância entre os resultados de reflectância e transmitância aqui obtidos e aqueles apresentados em [Cromianski et al. 2017].

Os valores de reflectância e transmitância obtidos neste estudo, calculados para seis espessuras ópticas ($\tau_0 = 0,1; 0,5; 1,0; 2,0; 5,0; 10,0$), foram comparados aos resultados de [Cromianski et al. 2017] e [Clements and Özışık 1983]. A concordância com [Cromianski et al. 2017] confirma a consistência do ADO em regime isotrópico, enquanto a comparação com [Clements and Özışık 1983] permite confrontar o ADO com a aproximação F_n , baseada em equações integrais singulares e dependente da seleção adequada dos pontos de colocação. Segundo [Clements and Özışık 1983], a aproximação F_7 alcança precisão de quatro a cinco casas decimais, sendo relevante notar que o parâmetro N do método F_N não corresponde à ordem de quadratura em esquemas de ordenadas discretas. O ADO apresentou ainda baixo custo computacional, com tempo médio de 0,130 s por conjunto de parâmetros.

Os resultados confirmam a reprodução dos valores de [Clements and Özışık 1983] para $N \geq 12$, exceto nos casos $\tau_0 = 0,1$ e $\tau_0 = 0,5$, onde as diferenças restringem-se às últimas casas decimais, comportamento também relatado por [Clements and Özışık 1983]. A Tabela 2 resume a comparação entre o ADO ($N = 12$) e o método F_7 , evidenciando a proximidade numérica entre as duas abordagens ao longo das espessuras ópticas analisadas.

Tabela 2. Reflectância: comparação entre ADO ($N = 12$) e F_7 .

ϖ	$\tau_0 = 0,1$		$\tau_0 = 0,5$		$\tau_0 = 1,0$	
	ADO	F_7	ADO	F_7	ADO	F_7
0,2	0,01460	0,01462	0,03715	0,03715	0,04393	0,04393
0,8	0,06493	0,06498	0,20562	0,20560	0,28015	0,28015
0,995	0,08379	0,08389	0,29324	0,29323	0,44124	0,44124

ϖ	$\tau_0 = 2,0$		$\tau_0 = 5,0$		$\tau_0 = 10,0$	
	ADO	F_7	ADO	F_7	ADO	F_7
0,2	0,04607	0,04607	0,04626	0,04626	0,04626	0,04626
0,8	0,32795	0,32795	0,34168	0,34168	0,34187	0,34187
0,995	0,59880	0,59880	0,76360	0,76360	0,82841	0,82841

A Figura 3 sintetiza os valores da Tabela 2, evidenciando o comportamento da reflectância obtida pelo ADO no regime isotrópico para diferentes albedos. Para $\varpi = 0,2$, a reflectância cresce apenas nas menores espessuras ópticas e rapidamente se estabiliza, refletindo a dominância da absorção. No caso $\varpi = 0,8$, observa-se aumento inicial mais pronunciado, seguido de tendência de estabilização. Já para $\varpi = 0,995$, a reflectância continua a crescer ao longo de todo o intervalo analisado, característica de meios quase conservativos. O gráfico, portanto, reúne de maneira clara a influência do albedo na

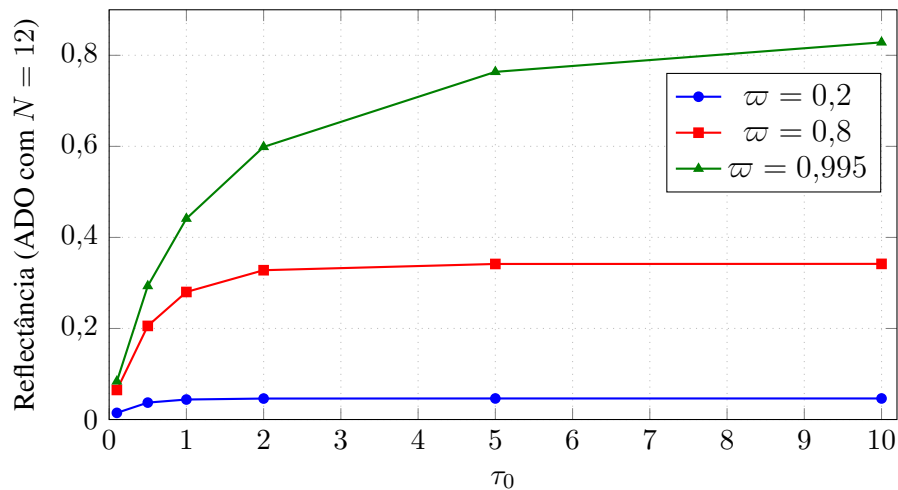


Figura 3. Reflectância calculada pelo método ADO para diferentes albedos de espalhamento, com base nos valores da Tabela 2.

evolução da reflectância em função da profundidade óptica.

A Tabela 3 compara a transmitância calculada pelo ADO com $N = 12$ e aquela fornecida pela aproximação F_7 . As duas formulações apresentam concordância ao longo de todas as espessuras ópticas, inclusive para albedos elevados. Assim como observado para a reflectância, as diferenças limitam-se às últimas casas decimais nos casos $\tau_0 = 0,1$ e $\tau_0 = 0,5$, indicando que o ADO preserva boa precisão na estimativa da transmitância em todos os regimes considerados.

Tabela 3. Transmitância: comparação entre ADO ($N = 12$) e F_7 .

ω	$\tau_0 = 0,1$		$\tau_0 = 0,5$		$\tau_0 = 1,0$	
	ADO	F_7	ADO	F_7	ADO	F_7
0,2	0,84696	0,84684	0,47432	0,47435	0,24627	0,24627
0,8	0,89657	0,89651	0,62197	0,62199	0,41624	0,41624
0,995	0,91521	0,91517	0,70178	0,70179	0,54884	0,54884

ω	$\tau_0 = 2,0$		$\tau_0 = 5,0$		$\tau_0 = 10,0$	
	ADO	F_7	ADO	F_7	ADO	F_7
0,2	0,07274	0,07274	0,00245	0,00245	0,00001	0,00001
0,8	0,19727	0,19727	0,02292	0,02292	0,00065	0,00065
0,995	0,38154	0,38154	0,18923	0,18923	0,08667	0,08667

A Figura 4 ilustra os valores de transmitância apresentados na Tabela 3, evidenciando o comportamento do transporte radiativo em regime isotrópico para diferentes albedos de espalhamento. Para valores pequenos de τ_0 , verifica-se uma distinção nítida entre as três curvas: albedos elevados apresentam maior transmitância inicial, enquanto albedos menores sofrem atenuação mais rápida em razão da predominância da absorção. À medida que a espessura óptica aumenta, todas as curvas decaem de forma monotônica, aproximando-se de valores reduzidos. Embora o albedo continue influenciando o nível residual de transmitância, observa-se que, em τ_0 elevados, as diferenças entre as curvas tornam-se menos acentuadas. Esse comportamento está de acordo com a resposta clássica

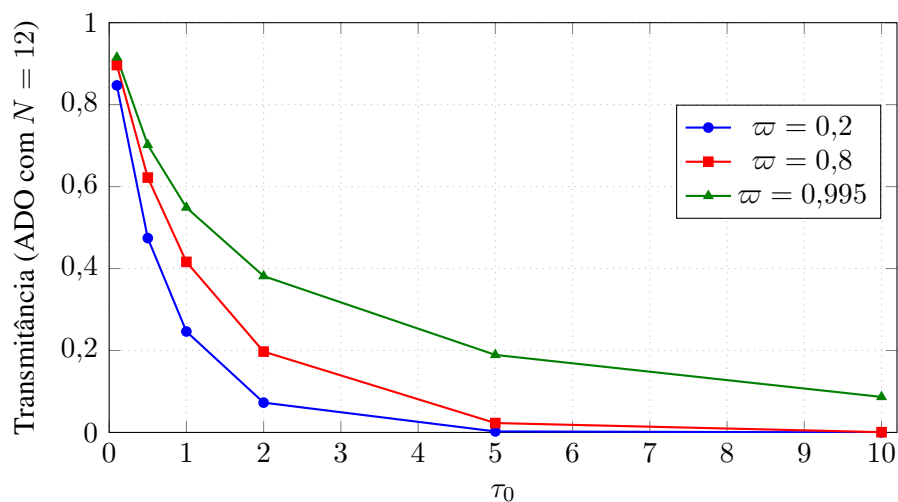


Figura 4. Transmitância calculada pelo método ADO para diferentes albedos de espalhamento, com base nos valores da Tabela 3.

de meios isotrópicos espessos, nos quais a combinação entre múltiplos espalhamentos e absorção progressiva conduz a um regime de forte atenuação, limitando a dispersão entre os valores de transmitância associados a diferentes albedos.

6. Conclusão

A implementação do método ADO em Python demonstrou-se eficaz na solução da equação de transferência radiativa unidimensional em meios vegetativos densos, permitindo comparar a função de fase de Henyey–Greenstein em sua forma analítica e expandida em polinômios de Legendre. O uso do Python, aliado a bibliotecas como *NumPy* e *SciPy*, favoreceu a modularização do código e a rastreabilidade dos cálculos, especialmente ao operar com matrizes grandes.

Os resultados mostraram que a expansão truncada da função de fase ($L = 99$) reproduz com precisão os valores exatos, e que a convergência numérica é atingida para $N \geq 30$, sem alterações significativas nos resultados, embora com aumento do tempo de execução. Em regime isotrópico, a reflectância e transmitância calculadas pelo ADO apresentaram excelente concordância com referências da literatura, confirmando a robustez do método ADO.

Em síntese, a combinação do ADO com a flexibilidade do Python permitiu organizar a solução, automatizar os cálculos e realizar análises sistemáticas da influência da função de fase, consolidando o método como ferramenta confiável e eficiente para estudos de transporte radiativo em dosséis vegetais opticamente espessos e anisotrópicos.

Referências

Barichello, L. B. (2011). Explicit formulations for radiative transfer problems. In Orlande, H. R. B., Fudym, O., Maillet, D., and Cotta, R. M., editors, *Thermal Measurements and Inverse Techniques*, pages 541–562. CRC Press, Boca Raton.

- Barichello, L. B., Garcia, R. D. M., and Siewert, C. E. (1997). On inverse boundary-condition problems in radiative transfer. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 57:405–410.
- Barichello, L. B. and Siewert, C. E. (1999). A discrete-ordinates solution for a non-grey model with complete frequency redistribution. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 62:665–675.
- Barker, H. W. and Marshak, A. (2001). Inferring optical depth of broken clouds above green vegetation using surface solar radiometric measurements. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 58(24):2989–3006.
- Binzoni, T., Leung, T. S., Gandjbakhche, A. H., Rüfenacht, D., and Delpy, D. T. (2006). The use of the Henyey–Greenstein phase function in Monte Carlo simulations in biomedical optics. *Physics in Medicine & Biology*, 51(17):N313–N322.
- Case, K. M. and Zweifel, P. F. (1967). *Linear Transport Theory*. Addison-Wesley.
- Chandrasekhar, S. (1960). *Radiative Transfer*. Dover Books on Intermediate and Advanced Mathematics. Dover Publications, rev. ed. edition.
- Clements, T. B. and Özişik, M. N. (1983). Thermal radiation in layered participating cylindrical media using an analytical method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 26(8):1419–1424.
- Conci, A., Azevedo, E., and Leta, F. R. (2008). *Computação Gráfica: Teoria e Prática*, volume 2. Elsevier, Rio de Janeiro, RJ.
- Cromianski, S. R., Camargo, M., Rodrigues, P., and Barichello, L. B. (2017). Avaliação de propriedades radiativas em meios homogêneos unidimensionais: Reflectância e transmitância. *TEMA. Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 18:531.
- Duderstadt, J. J. and Martin, W. R. (1979). *Transport Theory*. Wiley.
- Groff, F. (2023). Formulação ADO para Problemas Unidimensionais de Transferência Radiativa Acoplados à Equação de Biotransferência de Calor com Aplicação à Hipertermia Induzida por Laser. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PPGMAp - UFRGS), Porto Alegre, Brasil.
- Harris, C. R., Millman, K. J., van der Walt, S. J., Gommers, R., Virtanen, P., Cournapeau, D., Wieser, E., Taylor, J., Berg, S., Smith, N. J., et al. (2020). Array programming with NumPy. *Nature*, 585(7825):357–362.
- IPCC (2021). Climate change 2021: The physical science basis. <https://www.ipcc.ch/report/ar6/wg1/>.
- Krieger, A. and Wolf, S. (2020). Unbiased Monte Carlo continuum radiative transfer in optically thick regions. *Astronomy & Astrophysics*, 635:A130.
- Liou, K. N. (2002). *An Introduction to Atmospheric Radiation*. Academic Press, San Diego, 2 edition.
- Mentges, M. (2025). *Solução ADO para problemas bidimensionais de transporte de partículas com representação exata da lei de espalhamento*. Tese de doutorado, Uni-

versidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática e Estatística, Porto Alegre.

- Modest, M. F. (2013). *Radiative Heat Transfer*. Academic Press, Oxford, 3rd edition.
- Monteith, J. L. and Unsworth, M. H. (2013). *Principles of Environmental Physics: Plants, Animals, and the Atmosphere*. Elsevier, 4th edition.
- Myneni, R. B., Maggion, S., Iaquinta, J., Privette, J. L., Gobron, N., Pinty, B., Kimes, D. S., Verstraete, M. M., and Williams, D. L. (1995). Optical remote sensing of vegetation: Modeling, caveats, and algorithms. *Remote Sensing of Environment*, 51(1):169–188.
- Picca, P. and Furfaro, R. (2013). Analytical discrete ordinate method for radiative transfer in dense vegetation canopies. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 118:60–69.
- Rui, K., Barichello, L. B., and da Cunha, R. D. (2020). Recent studies on two-dimensional radiative transfer problems in anisotropic media. *Journal of Computational and Theoretical Transport*, 49(5):233–266.
- Shultis, J. K. and Myneni, R. B. (1988). Radiative transfer in vegetation canopies with anisotropic scattering. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 39:115–129.
- Siewert, C. E. (2002). Inverse solutions to radiative-transfer problems based on the binomial or the Henyey–Greenstein scattering law. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 72(6):827–835.
- Van Rossum, G. and Drake, F. L. (2001). Python reference manual. <https://www.python.org/doc/>. Python Software Foundation.
- Virtanen, P., Gommers, R., Oliphant, T. E., Haberland, M., Reddy, T., Cournapeau, D., et al. (2020). Scipy 1.0: Fundamental algorithms for scientific computing in python. *Nature Methods*, 17(3):261–272.