

Desenvolvimento de um Modelo de Programação Matemática para uma Variação do Problema de Escalonamento de Equipes com Múltiplas Habilidades utilizando GLPK

Diogo Corrêa Splendor¹, Ártion Pereira Dorneles¹

¹Curso de Bacharelado em Ciência da Computação do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha (IFFar) – Frederico Westphalen – RS – Brasil

diogo.2022014893@aluno.iffar.edu.br,

arton.dorneles@iffarroupilha.edu.br

Abstract. *The scheduling of volunteer teams with multiple skills is a recurrent problem in organizations with limited human resource availability. This paper proposes an Integer Linear Programming formulation for a variation of the Multi-Skill Scheduling Problem, motivated by a case study in a church context. The model considers availability constraints, minimum skill and characteristic requirements, and linked team constraints. Computational experiments were conducted using a set of artificial instances solved with the GLPK solver. The results show that the proposed model is able to generate feasible and high-quality schedules under different scenarios, highlighting the impact of volunteer availability and team constraints on problem feasibility*

Resumo. *O escalonamento de equipes voluntárias com múltiplas habilidades é um problema recorrente em organizações com recursos humanos limitados. Este trabalho propõe uma formulação de Programação Linear Inteira para uma variação do Problema de Escalonamento de equipes com Múltiplas Habilidades, motivada por um estudo de caso no contexto de uma igreja. O modelo considera restrições de disponibilidade, demandas mínimas por habilidades e características, além de equipes vinculadas. Experimentos computacionais realizados com o resolvidor GLPK demonstram a capacidade do modelo em gerar escalas factíveis e evidenciam o impacto da disponibilidade e da restrição de equipes na factibilidade do problema.*

1. Introdução

Embora as igrejas sejam organizações sem fins lucrativos, sua estrutura interna apresenta diversos processos que podem ser comparados aos de uma empresa. Assim como qualquer instituição organizacional, as igrejas precisam gerenciar recursos, manter atividades em funcionamento e arcar com despesas operacionais.

Contudo, grande parte dessas instituições não dispõe de recursos financeiros suficientes para a contratação de funcionários remunerados, sendo, portanto, dependentes do trabalho voluntário de seus membros para a manutenção das atividades. Nesse contexto, observa-se uma estrutura organizacional composta por diferentes setores, tais como tesouraria, administração, cantina, comunicação, mídia, ministério infantil, equipe de músicos, entre outros. Essas equipes são necessárias tanto para o

funcionamento dos cultos, quanto da organização como um todo, o que demanda pessoas capacitadas e disponíveis para o exercício das funções.

Cada setor exige habilidades distintas. Por exemplo, o setor de comunicação requer voluntários com conhecimentos técnicos para operar equipamentos de som, projetar apresentações em telões, administrar a transmissão de cultos ao vivo (lives) e manusear câmeras. Essa demanda aumentou especialmente após o período de isolamento social, causado pela pandemia da COVID-19, que levou muitas igrejas a adotarem o formato de culto online, ampliando a necessidade de infraestrutura e pessoal técnico (INCHURCH, 2025)

Diante da limitação de recursos humanos, torna-se imprescindível realizar uma gestão eficiente da alocação dos voluntários, assegurando que os diversos setores estejam sempre em funcionamento, sem sobrecarregar os membros. Entretanto, atualmente, essa alocação é feita de forma manual, por meio de escalas gerenciadas por líderes de cada setor, os quais precisam coordenar a disponibilidade dos voluntários e verificar possíveis conflitos com outras escalas simultâneas, o que torna o processo moroso e suscetível a erros.

Do ponto de vista da pesquisa operacional, o problema de alocação de voluntários em uma igreja, que exige avaliação de diferentes competências ao longo do tempo pode ser caracterizado como uma variação do Problema de Escalonamento de Equipes com Múltiplas Habilidades (PEEMH), amplamente estudado na literatura como um problema de otimização combinatória NP-Difícil. O PEEMH envolve a designação de indivíduos com diferentes níveis de proficiência a tarefas ou funções específicas, respeitando restrições de disponibilidade, demanda e compatibilidade. Embora existam estudos que abordem esse tipo de problema, cada aplicação prática apresenta restrições e características próprias, as quais influenciam diretamente na complexidade de resolução do problema.

Nesse contexto, este trabalho propõe uma formulação de programação matemática para uma variação do Problema de Escalonamento de Equipes com Múltiplas Habilidades, incorporando restrições observadas em um estudo de caso real conduzido na Primeira Igreja Batista de Tenente Portela, utilizado como motivação para a definição do problema. A partir dessa formulação, são conduzidos experimentos computacionais com o objetivo de analisar o comportamento do modelo proposto em um conjunto de instâncias artificiais com diferentes dimensões, explorando o impacto de parâmetros como disponibilidade, demanda e restrições de equipes na dificuldade de resolução dos problemas com o resolvidor matemático GLPK.

O restante deste trabalho está estruturado da seguinte forma. A Seção 2 apresenta as principais definições, conceitos, tecnologias e trabalhos relacionados, fundamentais para a compreensão do estudo. A Seção 3 descreve o problema investigado e propõe uma formulação matemática para sua resolução. A Seção 4 apresenta os experimentos computacionais realizados e a análise dos resultados obtidos. Por fim, a Seção 5 apresenta as principais conclusões da pesquisa e indica possibilidades para trabalhos futuros.

2. Referencial Teórico

Esta seção apresenta os principais conceitos teóricos que fundamentam este trabalho, abordando noções de otimização combinatória, programação linear inteira e ferramentas computacionais associadas. Além disso, é apresentado o Problema de Escalonamento de Equipes com Múltiplas Habilidades, bem como trabalhos relacionados para situar a pesquisa desenvolvida no contexto da literatura científica.

2.1 Fundamentos de Otimização Combinatória

A otimização combinatória é uma área da pesquisa operacional que estuda uma ampla variedade de problemas e métodos de resolução focados na otimização de recursos e no atendimento de um conjunto de restrições específicas da aplicação. Os problemas dessa natureza são comuns em aplicações operacionais, como por exemplo, escalonamento de tarefas, rotas de veículos, alocação de recursos, planejamento da produção e organização de horários escolares, entre outros (UNICAMP, 2025).

Um problema de otimização combinatória é composto por quatro elementos principais: variáveis de decisão, função objetivo, restrições e parâmetros. As variáveis de decisão representam as alternativas a serem escolhidas pelo problema para compor uma solução. A função objetivo define o critério a ser otimizado, como maximizar o lucro ou minimizar custos. As restrições delimitam o espaço de busca, estabelecendo regras que devem ser atendidas por uma solução. Finalmente, os parâmetros correspondem aos dados que descrevem as características de cada instância do problema. A partir desses elementos, se constrói um modelo matemático para o problema a ser resolvido, normalmente expresso como um sistema de equações e desigualdades, em que a função objetivo deve ser maximizada ou minimizada, respeitando-se todas as restrições. Esse modelo frequente é usado para definir o problema e algumas vezes para resolvê-lo diretamente dependendo do método (Goldbarg e Goldbarg, 2012).

Um problema de otimização combinatória pode ser abordado por duas principais classes de métodos: os métodos exatos e os métodos aproximativos. Os métodos exatos garantem a obtenção de uma solução ótima de um problema, desde que haja tempo e capacidade computacional suficiente. São apropriados especialmente para instâncias de pequeno ou médio porte, ou quando a qualidade da solução é essencial para a aplicação, são eles alguns exemplos: enumeração implícita, Programação Linear Inteira e Programação Dinâmica. Já os métodos aproximativos não garantem encontrar a solução ótima, mas buscam boas soluções em tempos computacionais menores, sendo mais adequados para problemas grandes ou com tempo limitado de processamento. Dentro dessa categoria, heurísticas e metaheurísticas representam as principais metodologias (Goldbarg e Goldbarg, 2012).

2.2 Programação Linear Inteira

A Programação Linear Inteira (PLI) é uma subárea da programação matemática voltada à resolução de problemas de otimização em que algumas ou todas as variáveis de decisão devem assumir valores inteiros. Esse tipo de modelagem é amplamente utilizado

em situações onde decisões discretas precisam ser tomadas, como alocação de recursos, escalonamento de tarefas ou seleção de itens, entre outros (Goldbarg e Goldbarg, 2012).

Um exemplo clássico de problema modelado como PLI é o Problema da Mochila 0-1. Nele, dado um conjunto de itens, cada um com um peso e um valor associado, e uma mochila com capacidade limitada, o objetivo é selecionar o subconjunto de itens que maximize o valor total sem exceder a capacidade de peso. O modelo matemático para esse problema é apresentado na Figura 1, onde é possível perceber as principais estruturas abaixo (Goldbarg e Goldbarg, 2012):

- x_j = número de objetos j selecionados,
- c_j = Valor do objeto j selecionado,
- w_j = Peso de uma unidade do objeto j selecionado,
- b = capacidade da mochila.

$$\text{Maximizar } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n w_j x_j \leq b$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad j=1,\dots,n$$

Figura 1: Formulação do Problema da Mochila 0-1. Fonte: GOLDBARG (2019)

Para resolver modelos de PLI, o principal algoritmo utilizado é o *branch-and-bound* (ramificação e delimitação). Esse algoritmo realiza uma enumeração inteligente das possíveis soluções, dividindo o problema original em subproblemas menores e explorando apenas aqueles que podem conduzir à solução ótima, descartando os demais com base em limites superiores e inferiores da função objetivo (Goldbarg e Goldbarg, 2012).

O problema mais geral associado a resolução de um modelo de PLI resolvido via *branch-and-bound*, pertence à classe dos problemas NP-difíceis, o que significa que, à medida que o número de variáveis cresce, o tempo necessário para encontrar uma solução ótima por métodos exatos cresce exponencialmente. Desta forma, o uso prático desta técnica, normalmente está limitado à resolução de problemas pequenos e médios ou que possam lidar com um limite de tempo às custas de uma redução na qualidade final da solução, descartando a garantia de otimalidade (Goldbarg e Goldbarg, 2012).

2.3 GLPK

O GLPK (GNU Linear Programming Kit) é uma biblioteca de software livre desenvolvida pela Free Software Foundation para a resolução de problemas de programação linear (PL) e programação inteira mista (MIP). Trata-se de uma ferramenta robusta voltada para aplicações que envolvem otimização matemática, sendo especialmente útil em situações como escalonamento de tarefas, alocação de recursos, planejamento de produção e outras áreas que exigem decisões baseadas em restrições e critérios de custo ou habilidades. (GNU Project, 2012)

Além disso, o GLPK oferece suporte à linguagem de modelagem GNU MathProg, que é baseada em um subconjunto da linguagem AMPL (A Mathematical Programming Language). O AMPL é uma linguagem comercial amplamente reconhecida por sua capacidade de expressar modelos matemáticos de forma clara e concisa, sendo muito utilizada em problemas de otimização (AMPL, 2025). O suporte à MathProg permite que problemas sejam descritos de maneira estruturada, com definição explícita de variáveis, restrições e funções objetivo, o que facilita o desenvolvimento e a leitura de modelos matemáticos complexos. Por fazer parte do projeto GNU, o GLPK pode ser utilizado, modificado e redistribuído gratuitamente, o que o torna uma alternativa viável e acessível a ferramentas comerciais pagas como Gurobi e CPLEX, tanto para projetos acadêmicos quanto profissionais.

2.4 Problemas de Escalonamento de Equipes com Múltiplas Habilidades

O Problema de Escalonamento de Equipes com Múltiplas Habilidades (PEEMH) representa um dos desafios mais relevantes no contexto de alocação de recursos humanos, especialmente em ambientes com grande diversidade de competências, limitações, habilidades e alta variedade de funções e tarefas. Esse tipo de problema exige definir quem deve executar uma determinada função, quando e por quanto tempo.

Problemas como esses são encontrados em diversas áreas, como a indústria da construção civil, projetos de tecnologia da informação, serviços de saúde e sistemas de processamento, entre outros. Afshar-Nadjafi (2021) revisou e classificou 160 publicações envolvendo o PEEMH, cobrindo o período de 2000 a meados de 2020. A análise considerou as características das funções objetivo, das formulações matemáticas, das metodologias de resolução e das aplicações potenciais. Dentre os artigos revisados, foi constatado que 68.13% incluíam modelos matemáticos como estratégia principal de resolução. Destes modelos, a Programação Inteira Mista (MIP) foi a abordagem mais comum, empregada em 54.2% dos casos. Adicionalmente, as meta-heurísticas foram o método de resolução mais frequente para os problemas de agendamento multiqualificados, contribuindo com 28.7% das abordagens de solução.

Afshar-Nadjafi (2021) identificou que o PEEMH possui quatro componentes essenciais: habilidades, decisões, objetivos e restrições. As habilidades correspondem à capacidade de cada colaborador para realizar atividades específicas com competência, as decisões são regras que introduzem padrões sobre quanto e como a qualificação das habilidades deve ser aplicada aos funcionários, os objetivos determinam a otimização do planejamento, o escalonamento e atribuição de recursos de cada múltipla habilidade e, finalmente, as restrições são baseadas nas tarefas, habilidade ou recursos da aplicação.

Evidentemente, essas regras podem assumir diferentes variações conforme a estrutura específica de cada problema de escalonamento. Por exemplo, distintas formas de aplicação das habilidades, como funcionários com uma única habilidade, totalmente capacitados para todas as tarefas ou parcialmente capacitado, demandam soluções específicas para cada caso que impactam tanto no desenvolvimento de novas heurísticas como na necessidade de proposição de novas formulações matemáticas, foco deste trabalho.

2.5 Trabalhos Relacionados

Embora o Problema de Escalonamento de Equipes com Múltiplas Habilidades (PEEMH) assumam formatos bastante distintos conforme o setor de aplicação, a maioria dos estudos recentes converge para a aplicação de modelos de Programação Linear Inteira (PLI) capazes de lidar simultaneamente com (i) restrições de cobertura da demanda; (ii) compatibilidade entre habilidades e tarefas e (iii) preferências dos integrantes da equipe. A seguir, destacam-se duas aplicações que mais se aproximam do problema abordado neste trabalho e que serviram de referência metodológica.

2.5.1 Aplicação no Escalonamento de Equipes de Enfermagem

No trabalho desenvolvido por Ouda, Sleptchenko e Simsekler (2023) os autores apresentam um modelo de otimização para o PEEMH aplicado ao escalonamento de equipes de enfermagem utilizando Programação Linear Inteira (PLI). O objetivo do estudo foi construir escalas de trabalho otimizadas para profissionais da área da saúde, respeitando restrições operacionais, qualificações profissionais e preferências individuais. O modelo foi resolvido usando a versão 9.1.2 do resolvidor matemático Gurobi, empregando planos de corte para encontrar a solução ótima.

Nesse estudo, o problema abordado foi elaborado com base em um conjunto de cenários artificiais de um hospital, envolvendo 18 enfermeiros distribuídos em quatro categorias, que representam seus níveis hierárquicos de qualificação ou habilidade: chefes de enfermagem, enfermeiros seniores, enfermeiros e assistentes de enfermagem. Foram consideradas restrições como limite mínimo e máximo de horas semanais, carga horária diária, número de turnos por dia, cobertura da demanda hospitalar por tipo de profissional e compatibilidade entre qualificação e função. Preferências individuais também foram incluídas, como dias de folga e horários desejados.

Para geração dos cenários artificiais, preferências de enfermeiros, como dias de folga e horários de trabalho foram criadas aleatoriamente ao longo de seis dias da semana usando um software de planilhas eletrônicas. O modelo foi testado nos diferentes cenários e os autores concluíram que ele obteve escalas viáveis e equilibradas, respeitando as restrições como horas máximas e mínimas semanais trabalhadas. Os resultados também demonstram que o modelo foi capaz de atender tanto às exigências operacionais quanto às preferências individuais, gerando escalas com alocação coerente e distribuição eficiente dos profissionais. Além disso, os autores realizaram simulações com variações de carga horária e volume de demanda, demonstrando que o modelo se adapta bem a diferentes contextos. A abordagem demonstrou ser promissora para aplicações práticas no gerenciamento de escalas hospitalares.

2.5.2 Aplicação no Escalonamento de Equipes Técnicas de Manutenção e Instalação de Serviços de Telecomunicação

No trabalho desenvolvido por Firat e Hurkens (2011) os autores apresentam uma abordagem de otimização baseada em Programação Linear Inteira (PLI) para resolver o PEEMH aplicado ao contexto de manutenção e instalação de serviço em uma empresa

de telecomunicação. O objetivo do estudo foi construir cronogramas eficientes para equipes técnicas que precisavam ser alocadas em tarefas complexas, levando em consideração restrições como: níveis de habilidade dos técnicos, precedência entre tarefas, disponibilidade diária, orçamento limitado para terceirizações e classes de prioridade dos serviços. Um aspecto importante do modelo é que as equipes precisavam permanecer juntas durante todo o turno de trabalho.

A abordagem proposta foi dividida em duas fases principais: a primeira executa um pré-processamento para determinar limites inferiores e decisões preliminares de terceirização. Já a segunda fase produz o escalonamento, onde diversas escalas são geradas por meio de um modelo de Programação Linear Inteira, que incorpora flexibilidade no agrupamento de técnicos e alocação de tarefas. A técnica central do modelo envolve o uso de modelos de emparelhamento bipartido para formar equipes e sequenciar tarefas, respeitando as restrições operacionais do problema.

Os dados utilizados para validação foram extraídos do conjunto de instâncias reais da empresa France Telecom, disponibilizadas como parte do Desafio ROADEF 2007, que inclui diferentes tamanhos de equipes, tarefas e níveis de especialização. Os autores utilizaram o resolvidor matemático CPLEX para encontrar soluções para o modelo, com um limite de tempo de 20 minutos por instância. Os resultados demonstraram que a abordagem proposta superou outras técnicas que participaram do desafio, especialmente em cenários com escassez de habilidades técnicas especializadas, obtendo melhores resultados em 8 das 10 instâncias do conjunto X, que representa os casos mais complexos do desafio.

3. Definição do problema

Esta seção define uma variante do PEEMH com um conjunto de restrições oriundas do contexto da igreja PPI Portela. O objetivo deste problema é construir uma escala otimizada de voluntários V para um conjunto de períodos P , que representam os dias em que ocorrem determinadas atividades. Para cada período, existe um conjunto de habilidades H necessárias (como voz, violão, bateria, mídia, entre outras) e o objetivo é selecionar um conjunto de voluntários capazes de desempenhar essas habilidades atendendo todas às demandas operacionais e maximizando o nível total de proficiência.

Cada voluntário $v \in V$ possui um nível de proficiência N_{vh} associado a cada habilidade $h \in H$, refletindo sua aptidão para desempenhar a função correspondente. Além disso, cada voluntário apresenta um conjunto de características C (como liderança ou gênero) modeladas por meio do parâmetro T_{vc} que identifica se o voluntário possui determinada característica. Há também a disponibilidade D_{vp} que determina se o voluntário v está disponível no período p .

Para cada habilidade h e período p , deve ser atendida uma demanda QH_{hp} que representa a quantidade necessária de voluntários com aquela habilidade. De modo semelhante algumas características c devem estar presentes em número suficiente em cada período p , sendo essa exigência definida pelo parâmetro QC_{cp} .

Adicionalmente, algumas atividades são desempenhadas em duplas ou equipes específicas, representadas pelo conjunto E . Essas equipes devem necessariamente ser escaladas juntas em todos os períodos em que estiverem designados. Esse requisito é relevante para manter a coerência operacional, como no caso de casais ou voluntários que desempenham funções complementares.

Para que uma escala seja considerada viável alguns requisitos fortes devem ser obrigatoriamente satisfeitos:

H1: *Capacidade operacional por habilidade.*

Cada período deve contar com uma quantidade de voluntários para cada habilidade necessária, conforme definido por QH_{hp} .

H2: *Capacidade mínima por característica.*

Cada período deve incluir a quantidade mínima exigida de voluntários com características específicas, conforme QC_{cp} garantindo equilíbrio e representatividade.

H3: *Disponibilidade dos voluntários.*

Um voluntário só será escalado em um período se estiver disponível naquele dia. Além disso, cada voluntário pode executar no máximo uma habilidade por período, evitando sobrecarga.

H4: *Alocação Mínima.*

Cada voluntário deve ser escalado em pelo menos um período, evitando exclusão e sobrecarga dos demais voluntários.

H5: *Equipes.*

Voluntários pertencentes ao conjunto E (Casais/duplas) devem ser escalados juntos sempre que alocados, respeitando vínculos pessoais e operacionais.

Além dos requisitos obrigatórios, este trabalho considera um requisito fraco relacionado à qualidade da solução obtida. Esse requisito consiste na maximização do nível total de habilidade dos voluntários escalados.

S1: *Maximização do nível de habilidade.*

Entre todas as escalas factíveis que atendem aos requisitos fortes, busca-se aquela que maximiza a soma dos níveis de proficiência N_{vh} dos voluntários alocados às habilidades em cada período. Esse critério permite priorizar voluntários mais capacitados para o desempenho das atividades, sem comprometer a factibilidade da escala. Esse requisito é tratado por meio da função objetivo do modelo matemático, não sendo obrigatório para a viabilidade da solução, mas impactando diretamente a qualidade da escala gerada.

A Tabela 1 apresenta um exemplo de uma escala fictícia para a variante do PEEMH proposta. Nas linhas da tabela são apresentados os voluntários V , enquanto as colunas correspondem aos períodos P , subdivididos pelas habilidades H . O valor numérico em cada célula indica o nível de habilidade N_{vh} do voluntário alocado para determinada habilidade em um período específico. O símbolo “-” indica que o voluntário não possui disponibilidade naquele determinado período. As células hachuradas indicam uma alocação.

Observa-se que a penúltima linha QH apresenta a demanda de voluntários exigida para a habilidade em cada período, também pode-se observar que na última linha QC apresenta quantidade mínima de voluntários exigida para cada característica em cada período, onde neste exemplo todos os voluntários possuem a característica necessária.

Os voluntários $V1$ e $V2$ pertencem ao mesmo conjunto de equipes E , definido pelo símbolo “*”, caracterizando uma dupla. Conforme a restrição de equipes do modelo, ambos são escalados conjuntamente nos períodos em que aparecem alocados, o que pode ser observado ao longo da tabela. Esse comportamento ilustra o funcionamento da restrição que impõe a alocação simultânea de voluntários vinculados, garantindo coerência operacional.

O exemplo também demonstra o atendimento das restrições de disponibilidade e limite máximo de uma habilidade por voluntário em cada período, bem como a priorização de voluntários com maiores níveis de proficiência, conforme estabelecido pela função objetivo de maximização de nível total de habilidade.

Tabela 1: Exemplo de uma escala fictícia do PEEMH.

Voluntários	Periodo 1			Periodo 2			Periodo 3			Periodo 4			Periodo 5			Periodo 6			Periodo 7		
	H1	H2	H3	H1	H2	H3	H1	H2	H3	H1	H2	H3	H1	H2	H3	H1	H2	H3	H1	H2	H3
V1*	4	3	3	4	3	3	4	3	3	4	3	3	4	3	3	4	3	3	-	-	-
V2*	2	1	10	2	1	10	2	1	10	-	-	-	2	1	10	2	1	10	2	1	10
V3	8	1	9	8	1	9	8	1	9	8	1	9	-	-	-	8	1	9	8	1	9
V4	6	0	0	6	0	0	6	0	0	6	0	0	6	0	0	-	-	-	-	-	-
V5	-	-	-	1	3	3	-	-	-	-	-	-	1	3	3	1	3	3	1	3	3
V6	-	-	-	-	-	-	8	9	0	8	9	0	-	-	-	8	9	0	8	9	0
V7	8	3	10	8	3	10	8	3	10	8	3	10	8	3	10	8	3	10	8	3	10
V8	8	6	3	8	6	3	8	6	3	8	6	3	8	6	3	8	6	3	8	6	3
V9	7	9	4	7	9	4	-	-	-	7	9	4	7	9	4	-	-	-	7	9	4
V10	0	2	6	-	-	-	0	2	6	0	2	6	0	2	6	0	2	6	0	2	6
QH	2	2	2	2	1	2	1	0	1	0	1	2	2	0	2	1	0	1	1	2	2
QC	2			2			1			1			2			1			1		

3.1 Formulação matemática proposta

A seguir, apresenta-se a formulação matemática proposta para a variante do PEEMH definida neste trabalho. A formulação é construída como um modelo de Programação Linear Inteira, cuja notação é resumida na Tabela 2.

Tabela 2: Notação dos símbolos utilizados na formulação matemática.

Símbolo	Definição
Conjuntos	
V	Conjunto de voluntários
H	Conjunto de habilidades
C	Conjunto de características
P	Conjunto de períodos
$E \subseteq V \times V$	Conjunto de equipes formadas por pares de voluntários
Parâmetros	
N_{vh}	Nível da habilidade h do voluntário v
$D_{vp} \in \{0, 1\}$	Indica se o voluntários v está disponível no período p
QH_{hp}	Quantidade de voluntários com habilidade h no período p
QC_{cp}	Quantidade mín. de voluntários com característica c no período p
$T_{vc} \in \{0, 1\}$	Indica se o voluntário v possui a característica c
Variáveis	
$x_{vhp} \in \{1, 0\}$	Indica se o voluntário v está alocado com a habilidade h no período p

$$\text{maximiza } Z = \sum_{v \in V} \sum_{h \in H} \sum_{p \in P} N_{vh} x_{vhp} \quad (1)$$

$$\sum_{v \in V} x_{vhp} = QH_{hp} \quad \forall h \in H, \forall p \in P \quad (2)$$

$$\sum_{v \in V} \sum_{h \in H} T_{vc} x_{vhp} \geq QC_{cp} \quad \forall c \in C, \forall p \in P \quad (3)$$

$$\sum_{h \in H} x_{vhp} \leq D_{vp} \quad \forall v \in V, \forall p \in P \quad (4)$$

$$\sum_{p \in P} \sum_{h \in H} x_{vhp} \geq 1 \quad \forall v \in V \quad (5)$$

$$\sum_{h \in H} x_{v_1 hp} = \sum_{h \in H} x_{v_2 hp} \quad \forall (v_1, v_2) \in E, \forall p \in P \quad (6)$$

$$x_{vhp} \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V, \forall h \in H, \forall p \in P \quad (7)$$

A função objetivo Z (1) busca maximizar o nível total de habilidade alocado aos períodos, priorizando voluntários com maior proficiência nas habilidades necessárias. Já o conjunto de restrições (2) garantem que a demanda de voluntários para cada habilidade em cada período seja atendida. O conjunto de restrições (3) assegura que a quantidade mínima de voluntários com determinadas características esteja presente em cada período. O conjunto de restrições (4) impede que um voluntário execute mais de uma habilidade em um mesmo período e garante que somente voluntários disponíveis possam ser escalados. O conjunto de restrições (5) garantem que cada voluntário participe da escala pelo menos uma vez ao longo do horizonte de planejamento. O conjunto de restrições (6) assegura que voluntários pertencentes a uma mesma equipe sejam alocados simultaneamente nos períodos em que forem designados. O conjunto de restrições (7) define o domínio da variável de decisão, garantindo que as alocações assumam valores binários, indicando se um voluntário foi escalado em determinado período.

4. Experimentos Computacionais e Resultados

Esta seção apresenta a avaliação computacional do modelo matemático desenvolvido para o problema de escalonamento de equipes voluntárias com múltiplas habilidades. O objetivo dos experimentos é analisar o desempenho do modelo proposto sob diferentes configurações de instâncias, verificando a sua capacidade de gerar escalas factíveis, analisando o nível de qualidade das soluções e identificando restrições que tornam a resolução mais difícil.

4.1 Ambiente Experimental

Os experimentos foram conduzidos em um computador equipado com processador AMD Ryzen 5 5600G, 16GB de RAM e sistema operacional Windows 10 na versão de 64 bits. Para a resolução do modelo proposto na Seção 3, este foi codificado diretamente na linguagem MathProg para execução através do resolvidor GLPK. Todas as execuções utilizaram um tempo limite de 10 horas por instância, conforme prática comum na literatura em problemas de escalonamento. Após o término de cada resolução, foram registrados para cada instância (i) o tempo de execução em segundos (Coluna Tempo); (ii) o valor da função objetivo da solução (Coluna Obj); (iii) a situação da solução (Coluna Situação) após o término da execução assumindo o valor “Ótima” ou “Infactível” quando o resolvidor determinar que a solução não existe; (iv) a diferença percentual entre o limite inferior do modelo e o valor da solução encontrada (Coluna GAP %).

4.2 Geração do Conjunto de Instâncias de Teste

Para avaliar adequadamente o desempenho do modelo proposto é necessário um conjunto de dados com instâncias e parâmetros diversificados. Em função da ausência de instâncias reais em quantidade e dimensões significativas, optou-se pela geração de um conjunto artificial de instâncias.

Durante a etapa inicial de planejamento do processo de geração de instâncias, foram conduzidos experimentos ad-hoc, com instâncias criadas aleatoriamente, variando-se o número de voluntários, número de habilidades e percentuais de disponibilidade. Contudo, rapidamente observou-se que uma grande quantidade dessas instâncias resultava em soluções infactíveis, principalmente, devido ao desbalanceamento entre três fatores fundamentais; (i) quantidade de habilidades, (ii) demanda mínima por habilidade, e (iii) baixa disponibilidade média dos voluntários. Assim, propomos um processo de geração de instâncias para o problema que trata esses parâmetros de maneira mais criteriosa.

O processo se baseia na compreensão de que o modelo exige que, em cada período, todas as habilidades necessárias sejam atendidas, então a quantidade de voluntários disponíveis em cada período precisa ser suficiente para cobrir, no mínimo, a demanda de todas as habilidades simultaneamente. A equação abaixo determina o número mínimo de voluntários (MV) para um instância aleatória, onde QH_{max} é a quantidade máxima de voluntários gerados por habilidade e período. $|H|$ é o número total de habilidades da instância. E d é a taxa percentual de disponibilidade dos voluntários que se deseja simular.

$$MV = QH_{max} \times |H| \times \left(\frac{1}{d}\right)$$

Usando MV é possível estimar o número mínimo de voluntários necessário para que exista ao menos uma possibilidade de atender simultaneamente a todas as habilidades ao longo dos períodos, fornecendo uma chance para a instância artificial alcançar uma solução factível. Desta forma, utilizando um script implementado na linguagem Python, foi gerado um conjunto contendo 30 instâncias artificiais representativas. A definição de conjuntos e parâmetros foi feita conforme a seguir:

- V foi gerado conforme a equação MV
- H foi definido aleatoriamente simulando 25, 75 ou 225 habilidades.
- C foi definido aleatoriamente entre 1 ou 5 características.
- P foi fixado em 30, simulando uma escala típica de 1 mês.
- E foi definido aleatoriamente entre 5, 15, 20 e 60 pares de equipes.
- N_{vh} foi definido aleatoriamente como um valor entre 0 e 10.
- D_{vp} foi definido conforme a taxa d , definida com 25%, 75% e 100%.
- QH_{hp} foi definida como um valor aleatório entre 0 e $QH_{max} = 2$.
- QC_{cp} foi definido como um valor aleatório entre 0 e 1.
- T_{vc} foi definido como um valor aleatório entre 0 e 1.

4.3 Experimento 1 - Avaliação do Modelo Proposto Completo

Neste primeiro experimento, todas as instâncias artificiais geradas conforme descrito na Seção 4.2 foram resolvidas considerando o modelo proposto com todas as suas restrições ativas. O objetivo desse experimento é avaliar a capacidade do modelo em gerar soluções factíveis e analisar seu desempenho computacional.

A Tabela 3 apresenta, para cada instância avaliada, a quantidade de períodos ($|P|$), voluntários ($|V|$), habilidades ($|H|$), características ($|C|$), equipes ($|E|$) e taxa de

disponibilidade (d). Além disso, é informada a situação final da solução, o tempo de execução, o valor da função objetivo e o GAP percentual.

Tabela 3: Resultados de desempenho com o modelo completo.

Id	lPl	lVl	lHl	lCl	lEl	d	Situação	Tempo	Obj	GAP
1	30	600	75	1	5	25%	Infactível	108.8	-	-
2	30	200	75	1	5	75%	Ótimo	67.7	22680	0.0%
3	30	150	75	1	5	100%	Ótimo	54.7	22320	0.0%
4	30	600	75	1	20	25%	Infactível	123.7	-	-
5	30	200	75	1	20	75%	Ótimo	102.1	22680	0.0%
6	30	150	75	1	20	100%	Ótimo	443.2	22290	0.0%
7	30	600	75	5	5	25%	Infactível	88.2	-	-
8	30	200	75	5	5	75%	Ótimo	83.5	22680	0.0%
9	30	150	75	5	5	100%	Ótimo	83.5	22320	0.0%
10	30	600	75	5	20	25%	Infactível	86.6	-	-
11	30	200	75	5	20	75%	Ótimo	153.3	22680	0.0%
12	30	150	75	5	20	100%	Ótimo	249.7	22290	0.0%
13	30	67	25	1	5	75%	Ótimo	1.4	7086	0.0%
14	30	67	25	1	20	75%	Infactível	0.4	-	-
15	30	67	25	5	5	75%	Ótimo	1.6	7086	0.0%
16	30	1800	225	1	15	25%	Infactível	7189.0	-	-
17	30	600	225	1	15	75%	Ótimo	3515.7	66960	0.0%
18	30	450	225	1	15	100%	Ótimo	2995.4	67910	0.0%
19	30	1800	225	1	60	25%	Infactível	7238.4	-	-
20	30	600	225	1	60	75%	Ótimo	3534.7	66830	0.0%
21	30	450	225	1	60	100%	Ótimo	3377.5	67970	0.0%
22	30	1800	225	5	15	25%	Infactível	3081.2	-	-
23	30	600	225	5	15	75%	Ótimo	2801.9	66960	0.0%
24	30	450	225	5	15	100%	Ótimo	2682.7	67910	0.0%
25	30	1800	225	5	60	25%	Infactível	2398.4	-	-
26	30	600	225	5	60	75%	Ótimo	2825.1	66830	0.0%
27	30	450	225	5	60	100%	Ótimo	6097.0	67970	0.0%
28	30	200	75	1	15	75%	Ótimo	97.6	22680	0.0%
29	30	200	75	1	60	75%	Ótimo	165.6	22510	0.0%
30	30	200	75	5	15	75%	Ótimo	90.5	22680	0.0%

Analisando os resultados da Tabela 3 podemos perceber que a maioria das instâncias foi resolvida de forma ótima dentro do limite de tempo estabelecido. No

entanto, um conjunto de instâncias resultou em soluções infactíveis, mesmo considerando o ajuste dos parâmetros de geração conforme o critério de número mínimo de voluntários proposto na Seção 4.2.

Focando a análise apenas nas instâncias com resultados infactíveis, é possível notar que a maioria delas apresenta baixa taxa de disponibilidade dos voluntários (25%), combinada com um elevado número de habilidades. Embora elas tenham um número total de voluntários relativamente alto, a baixa disponibilidade associada a outras restrições fortes, como por exemplo, a restrição de equipes, poderia limitar a flexibilidade do modelo ao exigir que determinados voluntários sejam sempre alocados conjuntamente, reduzindo muito o espaço de busca factível. Essa hipótese é testada no próximo experimento.

4.4 Experimento 2 - Avaliação do Modelo Proposto sem a Restrição de Equipes

Este segundo experimento tem o objetivo de verificar o motivo da infactibilidade das instâncias obtidas no Experimento 1. Para isso, todas as instâncias classificadas como infactíveis no Experimento 1 foram resolvidas novamente, mantendo-se inalterados todos os demais parâmetros e restrições do modelo proposto, exceto a restrição de equipes (H5) que foi desabilitada.

Os resultados apresentados na Tabela 4 indicam que todas as instâncias anteriormente classificadas como infactíveis tornaram-se factíveis após a remoção da restrição de equipes, sendo obtidas soluções ótimas em todos os casos analisados. Desta forma, os resultados demonstram que a restrição de equipes, quando associada a cenários com baixa disponibilidade e alta diversidade de habilidades, reduz significativamente a flexibilidade do modelo e o espaço de busca factível.

Tabela 4: Resultados do modelo proposto sem a restrição de Equipes.

Id	P	V	H	C	E	d	Situação	Tempo	Obj	GAP
1	30	600	75	1	5	25%	Ótimo	193.5	22249	0.0%
4	30	600	75	1	20	25%	Ótimo	176.2	22250	0.0%
7	30	600	75	5	5	25%	Ótimo	131.6	22249	0.0%
10	30	600	75	5	20	25%	Ótimo	143.1	22250	0.0%
14	30	67	25	1	20	75%	Ótimo	1.3	7085	0.0%
16	30	1800	225	1	15	25%	Ótimo	11045	66650	0.0%
19	30	1800	225	1	60	25%	Ótimo	11266.8	66530	0.0%
22	30	1800	225	5	15	25%	Ótimo	6306.1	66650	0.0%
25	30	1800	225	5	15	25%	Ótimo	6414.3	66530	0.0%

5. Considerações Finais

Este trabalho abordou uma variante do problema de escalonamento de equipes com múltiplas habilidades, propondo uma formulação de programação linear inteira motivada por um estudo de caso real no contexto de uma igreja. O modelo desenvolvido considera simultaneamente restrições de disponibilidade, demandas por habilidades e características, além da presença de equipes vinculadas, refletindo de forma mais fiel à realidade operacional observada em ambientes de trabalho voluntário.

Os experimentos computacionais realizados com o resolvidor GLPK demonstraram que o modelo é capaz de gerar escalas factíveis e de alta qualidade para uma ampla gama de instâncias, especialmente quando há um equilíbrio adequado entre número de voluntários, quantidade de habilidades exigidas e níveis de disponibilidade. Em diversos cenários, o resolvidor foi capaz de encontrar soluções ótimas dentro do limite de tempo estabelecido, evidenciando a consistência da formulação proposta.

Os resultados obtidos nas instâncias artificiais também reforçam o potencial de aplicação do modelo no estudo de caso que motivou este trabalho. Considerando que a Igreja PIB Portela possui menos de 100 voluntários e por volta de 50 habilidades, observa-se que essa ordem de grandeza é compatível com os cenários avaliados experimentalmente, nos quais o modelo produziu escalas factíveis e de alta qualidade em diferentes níveis de disponibilidade. Dessa forma, embora a validação com dados reais ainda seja um passo futuro importante, os experimentos realizados indicam que a formulação proposta tem potencial para apoiar a resolução do problema real no contexto da igreja estudada.

A análise dos resultados também permitiu identificar fatores críticos que impactam diretamente a factibilidade do problema. Observou-se que instâncias caracterizadas por baixa disponibilidade dos voluntários, combinadas com um elevado número de habilidades e com restrição de equipes obrigatórias, tendem a tornar o problema infactível. A realização de testes adicionais, nos quais a restrição de equipes foi removida confirmou que esse vínculo rígido entre voluntários, embora represente uma característica real do problema, aumenta significativamente a complexidade e reduz a flexibilidade do modelo. Além do modelo proposto, este trabalho apresenta também como contribuição, a criação de um conjunto de instâncias artificiais com metodologia bem definida e que pode servir de base para futuros aprimoramentos.

Como limitações do estudo, destaca-se o uso exclusivo de um método exato de resolução o que impõe restrições à escalabilidade do modelo para instâncias de grande porte. Além disso, os experimentos foram conduzidos majoritariamente com dados artificiais, ainda que cuidadosamente construídos para representar cenários realistas. Essas limitações abrem espaço para diversas possibilidades de trabalhos futuros, especialmente no sentido de ampliar e refinar o modelo matemático proposto por meio da inclusão de novas restrições e critérios operacionais. Entre as extensões possíveis, destacam-se a incorporação de limites máximos de participação por período para evitar sobrecarga, o balanceamento da distribuição de atividades ao longo do horizonte de planejamento e o tratamento mais flexível da restrição de equipes como uma restrição fraca. Além disso, a validação do modelo com dados reais de organizações voluntárias constitui um passo importante para avaliar sua aplicabilidade prática em cenários reais.

Referências

- GNU. GNU Linear Programming Kit. Disponível em: <https://www.gnu.org/software/glpk/glpk.html#documentation>. Acesso em: 16 jul. 2025.
- AMPL. A Mathematical Programming Language. Disponível em: <https://ampl.com/products/ampl/>. Acesso em: 16 jul. 2025.
- UNICAMP. Introdução à Otimização Combinatória. Disponível em: <https://www.ic.unicamp.br/~fkm/lectures/intro-otimizacao.pdf>. Acesso em: 16 jul. 2025.
- UNESP. Tese de Doutorado. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstreams/92465d18-cab9-4050-9a8e-8040df47594a/download>. Acesso em: 16 jul. 2025.
- INCHURCH. Igreja online: da resistência à adesão massiva. Disponível em: <https://inchurch.com.br/blog/igreja-online-da-resistencia-a-adesao-massiva/>. Acesso em: 9 jul. 2025.
- AFSHAR-NADJAFI, Behrouz. Multi-skilling in scheduling problems: A review on models, methods and applications. *Computers & Industrial Engineering*, v. 151, p. 107004, 2021. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0360835220306744?via%3Dihub>. Acesso em: 13 jul. 2025.
- OUDA, Eman; SLEPTCHENKO, Andrei; SIMSEKLER, Mecit Can Emre. Nurse Rostering via Mixed-Integer Programming. *Industrial Engineering and Applications*, [s. l.], p. 815-823, 2023. Disponível em: <https://ebooks.iospress.nl/doi/10.3233/ATDE230110>. Acesso em: 13 jul. 2025.
- GOLDBARG, Elizabeth; GOLDBARG, Marco. *Otimização Combinatória e Meta-heurísticas: Algoritmos e Aplicações*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2019.
- FIRAT, Murat; HURKENS, C. A. J. An improved MIP-based approach for a multi-skill workforce scheduling problem. *Journal of Scheduling*, v. 15, n. 3, p. 363-380, 2012. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10951-011-0245-x>. Acesso em: 13 jul. 2025.