

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
FARROUPILHA- *CAMPUS* SANTA ROSA

CURSO SUPERIOR LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CÁSSIO EMANUEL OLIVEIRA

RELATÓRIO DE ATIVIDADES DE ESTÁGIO

SANTA ROSA, RS
2025

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
FARROUPILHA- *CAMPUS* SANTA ROSA

CÁSSIO EMANUEL OLIVEIRA

RELATÓRIO DE ATIVIDADES DE ESTÁGIO

Trabalho apresentado como requisito para
obtenção do título de Licenciado em
Matemática, do curso de Licenciatura em
Matemática do Instituto Federal
Farroupilha – *Campus* Santa Rosa.

Orientadora: Elizangela Weber

Coorientadora: Daiani Finatto Bianchini

SANTA ROSA, RS
2025

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
FARROUPILHA- CAMPUS SANTA ROSA

A Orientadora Professora *Elizangela Weber*, a Coorientadora Professora *Daiani Finatto Bianchini* e o Estagiário *Cássio Emanuel Oliveira*, abaixo assinados, cientificam-se do teor do Relatório de Atividades de Estágio, do Curso de Licenciatura em Matemática.

RELATÓRIO DE ATIVIDADES
DE ESTÁGIO

Elaborado por
Cássio Emanuel Oliveira

como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Elizangela Weber
Orientadora

Daiani Finatto Bianchini
Coorientadora

Cássio Emanuel Oliveira
Estagiário

SANTA ROSA, RS
2025

DADOS DE IDENTIFICAÇÃO

1 Estagiário

- 1.1 **Nome:** Cássio Emanuel Oliveira
- 1.2 **Curso:** Licenciatura em Matemática
- 1.3 **Turma:** MAT T12
- 1.4 **Endereço:** Rua dos Marmeleiros, nº 255
- 1.5 **Município e Estado:** Santa Rosa - RS
- 1.6 **CEP:** 98790-696
- 1.7 **Telefone:** (55) 99631-4983
- 1.8 **E-mail:** cassio.2019305736@aluno.iffar.edu.br

2 Escola

- 2.1 **Nome:** Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha
- 2.2 **Endereço:** Avenida Coronel Bráulio de Oliveira, nº 1500
- 2.3 **Município e Estado:** Santa Rosa - RS
- 2.4 **CEP:** 98787-740
- 2.5 **Telefone:** (55) 2013-0200
- 2.6 **E-mail:** dg.sr@iffarroupilha.edu.br

3 Estágio

- 3.1 **Área de realização:** Educação Básica – Ensino Médio
- 3.2 **Coordenadora do Curso:** Ma. Mariele Josiane Fuchs
- 3.3 **Professora Orientadora:** Ma. Elizangela Weber
- 3.4 **Professora Coorientadora:** Ma. Daiani Finatto Bianchini
- 3.5 **Supervisora do estágio/Regente da turma:** Julhane Alice Thomas Schulz
- 3.6 **Carga horária total:** 140h
- 3.7 **Data de início e término:** 06 de agosto de 2025 a 10 de dezembro de 2025.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela força divina compartilhada, por Seu amor e por Seu amparo constante. Aos meus pais e aos meus irmãos, expresso minha profunda gratidão por sempre me incentivarem a seguir adiante, fortalecendo-me, auxiliando-me e iluminando meus dias. Aos amigos, agradeço pelo apoio e pela compreensão nos momentos em que precisei me ausentar.

Registro também meu reconhecimento aos colegas — em especial Saulo, Júnior, Tainã, Luan e Bernardo — por tornarem essa trajetória mais leve e por estarem ao meu lado durante toda a caminhada. Aos professores do Instituto Federal Farroupilha, que desempenharam um papel fundamental em minha formação como educador, deixo meu sincero agradecimento. Estendo, de maneira especial, minha gratidão à minha orientadora, professora Elizangela, e à minha coorientadora, professora Daiani, pelas orientações valiosas, dedicação e paciência ao longo desse processo.

Ao Instituto Federal Farroupilha, agradeço por me receber com carinho e por me oferecer a oportunidade de realizar meu segundo estágio docente. Meu agradecimento especial à professora regente da turma, aos alunos e a todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para o meu aprendizado e crescimento profissional.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Instituto Federal Farroupilha - Campus Santa Rosa	10
Figura 2 - Grade de Sudoku	27
Figura 3 - Folha de questões norteadoras	28
Figura 4 - Socialização dos códigos das matrizes	30
Figura 5 - Visualização gráfica no Geogebra	33
Figura 6 - Questão 4 do Trabalho	36
Figura 7 - Resolução da questão 4: aluno M e aluno P	37
Figura 8 - Questão 10 da Prova	38
Figura 9 - Resolução da questão 10: aluno G e aluno K	39

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	A ESCOLA – CAMPO DE INTERVENÇÃO DO ESTÁGIO	10
2.1	Histórico da Escola ...(nome completo da escola)	10
2.2	Contexto Social	13
2.3	Contexto Cultural	14
2.4	Dinâmica Pedagógica	15
3	PRESSUPOSTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS	22
3.1	A Educação Matemática no Campo de Intervenção do Estágio	22
3.2	A turma do Estágio	25
3.3	Os Procedimentos Didáticos Metodológicos do Estágio	25
3.4	A Relação Teoria e Prática na Formação do Professor	40
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	42
	REFERÊNCIAS	44
	APÊNDICES	46

1 INTRODUÇÃO

O Estágio Curricular Supervisionado IV foi cuidadosamente estruturado para proporcionar um ambiente fértil de reflexão e experimentação no percurso da formação docente. Seu propósito é inspirar de forma contínua o acadêmico, ao mesmo tempo em que facilita interações produtivas e significativas com toda a comunidade escolar e com os profissionais experientes que atuam na área em questão.

Este período de estágio configura-se como uma oportunidade ímpar para que o futuro docente compreenda, de maneira aprofundada, os desafios inerentes à profissão, capacitando-o a buscar e a construir soluções para tais obstáculos. Assim, a experiência se torna enriquecedora e fundamental para o pontapé inicial de sua trajetória profissional. De forma complementar, o licenciando terá a chance valiosa de ter seu primeiro contato direto com a direção e de analisar como a teoria aprendida em sala de aula é aplicada na prática, permitindo-lhe verificar a real efetividade desse conhecimento dentro do contexto educacional.

O presente relato tem como objetivo principal apresentar e discutir as ações pedagógicas que foram implementadas durante a realização do Estágio Curricular Supervisionado IV. Este estágio faz parte da grade curricular do Curso de Licenciatura em Matemática, oferecido pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha (IFFar) - *Campus* Santa Rosa. As atividades em questão foram conduzidas junto a uma turma de 2º ano do Curso Técnico Integrado em Móveis (MOI), nas dependências do próprio IFFar - *Campus* Santa Rosa. O período em que o estagiário esteve responsável pela regência iniciou-se em 4 de setembro de 2025 e se estendeu até 23 de outubro de 2025, abrangendo tanto a fase de observação quanto o desenvolvimento efetivo das práticas em sala de aula com os estudantes.

A essência deste trabalho reside na Prática Pedagógica efetivamente conduzida pelo estagiário. Este processo envolveu a cuidadosa elaboração de planos de aula e, posteriormente, seu desenvolvimento em sala com os alunos do 2º ano do MOI. Para sustentar e direcionar esta prática, o estudo baseou-se em importantes documentos institucionais da escola, como o Projeto Político Institucional (PDI) (SANTA MARIA, 2019), o Projeto Pedagógico de Curso (PPC) (SANTA ROSA, 2021) e os Planos de Ensino vigentes.

A programação curricular definida para a realização do estágio concentrou-se no estudo de matrizes, determinantes e sistemas lineares, que estão alocados no grande eixo temático de Números e Álgebra.

Para dar forma e profundidade às atividades desenvolvidas, foram incorporados pressupostos teóricos que nortearam as metodologias de ensino utilizadas durante a regência. Entre as abordagens pedagógicas escolhidas, destacam-se: a abordagem expositiva e dialogada (PELLIZARI, 2002), a investigação matemática (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2003), a metodologia de jogos (LARA, 2004), além de outras fontes de referência.

2 A ESCOLA – CAMPO DE INTERVENÇÃO DO ESTÁGIO

Neste capítulo, o acadêmico dedicará atenção à apresentação detalhada do campo de intervenção onde o estágio foi conduzido. Para isso, será resgatada a história do Instituto Federal Farroupilha (IFFar) - *Campus* Santa Rosa, trazendo à luz os marcos mais significativos que moldaram sua trajetória, além de contextualizar sua inserção social e cultural na região. Complementarmente, serão compartilhadas observações sobre o contexto metodológico que rege o Instituto e como sua dinâmica pedagógica se manifesta no dia a dia.

2.1 Histórico da Escola - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha

O presente relato tem como propósito apresentar o Instituto Federal Farroupilha (IFFar) - *Campus* Santa Rosa (Figura 1), uma instituição cuja história notável remonta a 23 de setembro de 1909. Naquele período, sob a presidência de Nilo Peçanha, o Decreto-Lei N° 7.566 estabeleceu a criação de dezenove Escolas de Aprendizes Artífices.

Em um processo de evolução alinhado às crescentes necessidades da população, essas instituições passaram por diversas modificações significativas até se consolidarem como Escolas Técnicas Federais e, posteriormente, serem rebatizadas como Centros Federais de Educação Tecnológica (Cefets), conforme autorizado pela Lei N° 8.948, em 1994. O grande propósito dessas transformações era expandir a oferta, englobando o ensino profissionalizante e o nível superior, com um forte incentivo à pesquisa e ao desenvolvimento tecnológico.

Figura 1 - Instituto Federal Farroupilha - Campus Santa Rosa



Fonte: Página do Instituto Federal Farroupilha - Campus Santa Rosa, 2025.

Contudo, a designação e a modificação institucional que culminaram na criação dos Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia ocorreram apenas em 2008. Estes institutos nasceram com propósitos mais amplos e complexos, dedicados a prover educação profissional e tecnológica em uma variedade de modalidades de ensino.

Em contraste com as escolas de âmbito estadual e municipal, que adotam o Projeto Político Pedagógico (PPP), o Instituto Federal Farroupilha utiliza o Plano de Desenvolvimento Institucional (PDI). Este documento fundamental tem a missão de delinear a proposta pedagógica global do Instituto, descrevendo seus princípios norteadores, políticas, prioridades e todo o planejamento estratégico relacionado ao ensino, à pesquisa e à extensão. Adicionalmente, conta com os Projetos Pedagógicos de Cursos (PPCs), que se dedicam a especificar o contexto de cada curso oferecido, seja ele integrado ao Ensino Médio ou à Educação de Jovens e Adultos, ou subsequente ao Ensino Médio, ou de Ensino Superior e Pós-Graduações.

Neste cenário, a estrutura dos Institutos Federais é regulamentada pela Portaria Nº 1.291, de 30 de dezembro de 2013, do Ministério da Educação. Dessa forma, o Instituto Federal Farroupilha (IFFar) é composto por um conjunto de unidades interdependentes: Reitoria, *Campus*, *Campus* Avançado, Centros de Referência e Polos de Educação a Distância (EAD). A Reitoria funciona como o órgão executivo central do IFFar, sendo a responsável pela gestão estratégica, coordenação e supervisão de todas as operações realizadas em seus *campi*.

Em alinhamento com o seu Projeto Político Institucional (PDI), a instituição baseia o seu planejamento estratégico em elementos essenciais, como:

Missão – Promover a educação profissional, científica e tecnológica, pública e gratuita, por meio do ensino, pesquisa e extensão, com foco na formação integral do cidadão e no desenvolvimento sustentável. Visão – Ser excelência na formação de técnicos de nível médio, professores para a educação básica e demais profissionais de nível superior, por meio da interação entre ensino, pesquisa, extensão e inovação. Valores – Ética; solidariedade; responsabilidade social, ambiental e econômica; comprometimento; transparência; respeito; gestão democrática e inovação (SANTA MARIA, p. 23, 2019).

Em suma, o Instituto Federal Farroupilha (IFFar) - *Campus* Santa Rosa, com uma trajetória que se iniciou em 2009, demonstra uma capacidade constante de se moldar às demandas sociais. Suas transformações ao longo dos anos refletem o

compromisso contínuo em prover as necessidades educacionais de sua comunidade.

Para garantir um atendimento eficiente à sua comunidade escolar e aos 1200 alunos, que englobam tanto os Cursos de Graduação quanto a Educação Básica em suas diversas formas, a instituição organiza sua gestão da seguinte maneira: conta com a Diretora Geral (DG): Analice Marchezan; a Diretora de Planejamento e Desenvolvimento Institucional (DPDI): Renata Rotta; a Diretora de Ensino (DE): Elizângela Weber; o Diretor de Administração (DAD): Magnus Scheffler; e o Diretor de Pesquisa Extensão e Produção (DPEP): Adriano Wagner.

Esta equipe de gestão compõe o Colegiado de Campus, que se desdobra em diversos setores organizacionais, conforme detalhado a seguir. Cada setor, por sua vez, é subdividido em áreas específicas. A DPDI abarca a Coordenação de Gestão de Pessoas, a Coordenação de Tecnologia da Informação e a Unidade de Gestão de Documentos; a DAD engloba a Coordenação de Almoxarifado e Patrimônio, a Coordenação de Infraestrutura, a Coordenação de Licitações e Contratos e a Coordenação de Orçamento e Finanças; a DPEP é composta pela Coordenação de Extensão e Produção e pela Coordenação de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação. Por fim, a DE se divide em Biblioteca, Coordenação de Ações Afirmativas (CAA), Coordenação de Apoio a Pessoas com Necessidades Educacionais Específicas (CAPNE), Coordenação de Assistência Estudantil (CAE), Coordenação de Registros Acadêmicos (CRA), Coordenação de Educação a Distância (CEAD) e a Coordenação Geral de Ensino, que supervisiona as Coordenações de Cursos Superiores, as Coordenações de Cursos Integrados e o Setor de Assessoria Pedagógica. Toda essa estrutura complexa foi meticulosamente pensada e organizada para oferecer a melhor forma de atender às necessidades e demandas de seus alunos, assegurando a eficiência e a alta qualidade dos serviços prestados.

Em virtude do que foi mencionado, a instituição dispõe de uma estrutura física que beneficia a totalidade dos alunos, não se restringindo apenas àqueles com necessidades especiais. Esta infraestrutura abrange instalações como a Biblioteca, o Ginásio, o Refeitório, laboratórios (incluindo o de Matemática), entre outras áreas.

2.2 Contexto Social

O desenvolvimento social da comunidade é fortemente marcado pela intensa atuação e participação daqueles que frequentam e utilizam os espaços da Instituição de ensino. Os estudantes matriculados são originários da área de abrangência do *Campus*, que, embora situado na zona urbana de Santa Rosa, cobre uma extensa região geográfica. Esta área engloba mais de 50 municípios da região, a maioria do Noroeste do Rio Grande do Sul.

Para ingressar no IFFar, especificamente na modalidade de Curso Técnico Integrado, os candidatos devem realizar a inscrição por meio de um edital institucional e participar de um processo seletivo baseado em uma prova objetiva. Neste contexto, e com o intuito de garantir o acesso dos candidatos cotistas, a instituição assume o compromisso de aprimorar continuamente os procedimentos de seleção e admissão, especialmente no que tange a Pessoas com Deficiência (PCDs). Tais melhorias envolvem a simplificação dos trâmites, a criação de um Grupo de Trabalho (GT) dedicado a revisar a Política de Ações Afirmativas e a garantia da isenção da taxa de inscrição nos processos seletivos para os candidatos elegíveis.

Desse modo, a Instituição estabelece reservas de vagas destinadas a candidatos em geral, Pessoas com Deficiência, e indivíduos autodeclarados como pretos, pardos e indígenas, com base em critérios de renda. As vagas oferecidas pelo IFFar são distribuídas, tanto para cursos técnicos quanto para a graduação, da seguinte forma: 60% são destinadas aos alunos advindos da escola pública, 35% para a Ampla Concorrência (AC) e, por fim, 5% para pessoas com deficiência.

No que se refere ao suporte essencial ao corpo discente, a Assistência Estudantil é o setor responsável por, em colaboração com outros setores e a comunidade, buscar atenuar as dificuldades e carências dos estudantes em situação de vulnerabilidade socioeconômica. Seu trabalho é focado em promover a inclusão social, incentivar a produção de conhecimento, aprimorar o rendimento acadêmico e assegurar o bem-estar geral dos alunos.

Nessa perspectiva, a Assistência Estudantil do IFFar orienta suas ações seguindo as diretrizes do Programa Nacional de Assistência Estudantil (PNAES, 2010), abrangendo diversas áreas de suporte aos discentes. Entre elas, destacam-se: garantia de segurança alimentar e nutricional, assistência financeira,

cuidados com a saúde, fomento ao esporte, cultura e lazer, apoio pedagógico-didático, além de um suporte dedicado ao acesso, participação e aprendizado de estudantes com deficiência, transtornos globais do desenvolvimento e altas habilidades/superdotação.

Em resumo, a atuação institucional visa decididamente impulsionar o desenvolvimento social e a inclusão de diversos grupos de estudantes, dedicando atenção especial àqueles em condições de maior vulnerabilidade. Por meio de políticas sólidas de ações afirmativas, processos seletivos acessíveis e um suporte integral, a instituição trabalha para garantir a equidade de oportunidades para todos, independentemente de sua origem, condição socioeconômica ou necessidades específicas.

A Assistência Estudantil, neste contexto, exerce um papel vital, ao fornecer o apoio necessário em áreas essenciais para o sucesso acadêmico e o bem-estar dos discentes. Ao fortalecer os pilares da inclusão, do acesso a uma educação de qualidade e do suporte contínuo, a instituição contribui ativamente para a construção de uma comunidade acadêmica mais justa e diversificada.

2.3 Contexto Cultural

Com o objetivo de cumprir o que está estabelecido no artigo 215 da Constituição da República Federativa do Brasil de 1988, que determina como responsabilidade do Estado assegurar "a todos o pleno exercício dos direitos culturais e o acesso às fontes da cultura nacional, além de apoiar e incentivar a valorização e a difusão das manifestações culturais", a instituição se empenha em implementar ações que garantam o acesso universal e democrático à cultura. Assim, busca-se ativamente fomentar a preservação e a promoção da diversidade cultural em seu sentido mais abrangente.

Nesse sentido, o IFFar integra um eixo estratégico que engloba os projetos e as iniciativas da Assistência Estudantil. O objetivo central é contribuir para o desenvolvimento integral dos estudantes regularmente matriculados, ao mesmo tempo em que garante a ampliação do acesso e oferece as condições necessárias para a sua permanência e êxito acadêmico. Um dos componentes importantes deste eixo é o estímulo ao esporte, à cultura e ao lazer, formalmente regulamentado pelo

Programa de Promoção da Cultura, Esporte e Lazer do Instituto Federal Farroupilha (SANTA MARIA, 2019).

Para concretizar esse propósito, e em consonância com o Plano de Desenvolvimento Institucional (SANTA MARIA, 2019), o *campus* disponibiliza o Núcleo de Estudos Afro-Brasileiros e Indígenas (NEABI). Este Núcleo tem a importante missão de criar espaços e desenvolver atividades que assegurem uma educação pluricultural e pluriétnica, visando a construção plena da cidadania através da valorização da identidade racial, especialmente de negros, afro-brasileiros e indígenas.

Além disso, a instituição conta com o Núcleo de Gênero e Diversidade Sexual (NUGEDIS), que se dedica a conceber políticas, iniciativas e projetos. O foco do NUGEDIS é promover o respeito e a valorização de todos os indivíduos, estimular a criação de ambientes seguros para o debate e incentivar a troca de experiências e reflexões sobre as questões relacionadas aos temas de gênero e diversidade sexual.

Uma das medidas de inclusão mais significativas adotadas pelo IFFar é o reconhecimento do direito ao uso do nome social. Essa medida reafirma que pessoas transexuais e travestis têm o direito de escolher a forma nominal pela qual desejam ser tratadas em todos os atos e processos realizados na instituição, conforme estabelecido na Instrução Normativa – Uso do Nome Social no âmbito do IFFar. O nome social é, portanto, entendido como aquele com o qual as pessoas se identificam e são reconhecidas pela sociedade.

Neste contexto, fica evidente que a inserção da dimensão cultural nas discussões e práticas da instituição é fundamental. Ela se torna o alicerce para promover o respeito às particularidades e individualidades de cada pessoa, e também para enriquecer o conhecimento sobre as mais diversas culturas.

2.4 Dinâmica Pedagógica

Em observância aos seus documentos oficiais e às práticas observadas no IFFar - *Campus* Santa Rosa, a instituição busca desenvolver uma abordagem didática que prioriza, no processo de ensino e de aprendizagem, a construção do conhecimento por meio da interação constante entre docente e discente. Ambos são vistos como participantes ativos e essenciais na elaboração do saber. Conforme a

perspectiva de Freire (1996), o processo de ensino e aprendizagem se manifesta como uma via de mão dupla: o professor não apenas ensina, mas também aprende; e o aluno, ao mesmo tempo que aprende, ensina.

O ensino é concebido como uma prática intencional e sistemática, voltada para a aquisição de conhecimentos, valores e atitudes que são cruciais para diversas trajetórias educacionais. Ao reconhecer e valorizar as experiências prévias dos alunos e ao empregar métodos que estimulam sua participação ativa e o diálogo, a instituição almeja também uma estrutura curricular adaptável. Essa flexibilidade visa reconhecer e respeitar os processos formativos singulares de todos os envolvidos, incluindo os próprios educadores.

Em função do que foi exposto, é importante frisar que o presente relatório está focado no Curso Técnico Integrado em Móveis, oferecido pelo IFFar. Este programa é direcionado aos estudantes que concluíram o Ensino Fundamental, bem como àqueles que ingressam pela Educação de Jovens e Adultos (EJA), os quais também têm a oportunidade de cursar o Ensino Médio Integrado ao Técnico, porém na modalidade EJA. Ao final dessa jornada, os alunos obtêm uma qualificação técnica de nível médio.

O propósito primordial desta formação é preparar e capacitar os alunos para a sua atuação no mercado de trabalho. O currículo enfatiza a interpretação, elaboração e execução de projetos, além é claro, do desenvolvimento e confecção de móveis. Além disso, o programa busca incitar o desenvolvimento de um pensamento crítico e responsável em relação à comunidade em que esses futuros profissionais estarão inseridos.

Para atingir esses objetivos, o IFFar emprega metodologias que promovem o envolvimento direto e dialógico dos estudantes. Essa abordagem visa organizar um currículo flexível que seja capaz de identificar e respeitar os processos individuais e coletivos de cada pessoa envolvida na construção do ensino e da aprendizagem (SANTA MARIA, 2019).

Como parte essencial da avaliação do desempenho de cada aluno, em conformidade com o Projeto Pedagógico do Curso Técnico em Móveis Integrado (PPC), a instituição propõe que a análise do:

rendimento escolar enquanto elemento formativo é condição integradora entre ensino e aprendizagem, devendo ser ampla, contínua, gradual, dinâmica e cooperativa, acontecendo

paralelamente ao desenvolvimento dos conteúdos (SANTA ROSA, p. 32, 2021).

Dessa forma, é prática comum do IFFar realizar uma avaliação holística de seus alunos, considerando uma variedade de aspectos, tais como o diagnóstico, o comprometimento, o respeito, as competências e os saberes demonstrados.

Contudo, é crucial destacar a obrigatoriedade de uma avaliação quantitativa, que exige que o aluno obtenha a média mínima de 7 para aprovação. Caso a média não seja atingida, o aluno tem o direito de realizar um exame final para buscar a aprovação. Para que essa oportunidade seja concedida, é necessário que o aluno alcance uma nota superior a 1,7 e mantenha um índice de frequência mínima de 75%. Para auxiliar os alunos com desempenho abaixo do esperado, a instituição planeja e implementa atividades de nivelamento, incluindo a recuperação paralela, distribuídas ao longo de todo o percurso formativo. Em caso de exame, para obter a aprovação, a nota do aluno é calculada da seguinte forma: a nota do semestre é multiplicada por 0,6 e a nota do exame é multiplicada por 0,4. O resultado da soma dessas notas deve ser maior ou igual a 5.

Nesse contexto de apoio, existe um projeto de ensino relevante denominado Monitoria: um espaço de inter(ação) e ensino e aprendizagem em Matemática. Seu foco é oferecer ações de ensino direcionadas ao acompanhamento e à superação das dificuldades no processo de aprendizagem na área de Matemática. O projeto tem como meta primordial minimizar os índices de reprovação e evasão nos componentes curriculares desta área. Destinado a todos os estudantes do IFFar - *Campus* Santa Rosa/RS, o projeto abrange tanto o Ensino Básico quanto o Ensino Superior.

Este processo de monitoria consiste na realização de atividades extracurriculares, concebidas para apoiar os estudantes na superação de lacunas de aprendizagem. A intenção é prevenir a incompreensão dos conteúdos, a reprovação e o abandono escolar. É importante frisar que essas atividades não são consideradas na carga horária oficial do curso ou da disciplina. A responsabilidade de propor estratégias de recuperação recai sobre o professor, e estas devem ser integradas em seu planejamento pedagógico, conforme consta no PPC (SANTA ROSA, 2021).

Buscando promover a inclusão plena dos estudantes, a Instituição oferece suporte especializado para alunos com qualquer tipo de deficiência, assim como

para aqueles que pertencem a grupos com diferenças étnicas, de gênero, culturais e econômicas. Em conformidade com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB):

Art. 59. Os sistemas de ensino assegurarão aos educandos com deficiência, transtornos globais do desenvolvimento e altas habilidades ou superdotação: I – currículos, métodos, técnicas, recursos educativos e organização específicos, para atender às suas necessidades; II – terminalidade específica para aqueles que não puderem atingir o nível exigido para a conclusão do ensino fundamental, em virtude de suas deficiências, e aceleração para concluir em menor tempo o programa escolar para os superdotados; III – professores com especialização adequada em nível médio ou superior, para atendimento especializado, bem como professores do ensino regular capacitados para a integração desses educandos nas classes comuns; IV – educação especial para o trabalho, visando a sua efetiva integração na vida em sociedade, inclusive condições adequadas para os que não revelarem capacidade de inserção no trabalho competitivo, mediante articulação com os órgãos oficiais afins, bem como para aqueles que apresentam uma habilidade superior nas áreas artística, intelectual ou psicomotora; V – acesso igualitário aos benefícios dos programas sociais suplementares disponíveis para o respectivo nível do ensino regular (BRASIL, p. 40, 1996).

Para cumprir esse propósito, a instituição mantém a Coordenação de Apoio a Pessoas com Necessidades Educacionais Específicas (CAPNE), uma entidade composta por profissionais dedicados a oferecer apoio aos estudantes. Essa coordenação abrange diversos núcleos de suporte, incluindo o Núcleo de Apoio às Pessoas com Necessidades Específicas (NAPNE), o Núcleo de Estudos Afro-Brasileiros e Indígenas (NEABI) e o Núcleo de Gênero e Diversidade Sexual (NUGEDIS). Adicionalmente, na Reitoria, está localizado o Núcleo de Elaboração e Adaptação de Materiais Didático-Pedagógicos (NEAMA), cujo foco principal é desenvolver materiais didático-pedagógicos acessíveis (Santa Rosa, 2021).

Atualmente, o IFFar atende a 17 alunos incluídos, sendo 7 no Ensino Médio Integrado e 10 no Ensino Superior. Para assegurar um acolhimento e uma recepção apropriada a esses estudantes, a instituição oferece rampas que garantem o acesso de cadeirantes ao segundo andar, além de banheiros adaptados para diversas necessidades, acompanhados por um monitor que presta suporte nessas situações.

Ademais, a infraestrutura conta com sinalização específica para deficientes visuais, incluindo indicações em Braille em cada porta de sala de aula, e disponibiliza intérpretes para auxiliar alunos surdos. Há também uma profissional com especialização em educação inclusiva que oferece suporte aos alunos que

necessitam de assistência específica no Núcleo de Atendimento às Pessoas com Necessidades Educacionais Específicas (NAPNE).

A assistência fornecida pelo Núcleo de Atendimento às Pessoas com Necessidades Educacionais Específicas (NAPNE) tem como prioridade promover um processo de escolarização cada vez mais inclusivo. Para isso, o Núcleo trabalha em parceria com o Atendimento Educacional Especializado (AEE), que se dedica a identificar, planejar e organizar recursos pedagógicos com o intuito de eliminar as barreiras que possam impedir que os alunos incluídos se desenvolvam com qualidade e dignidade na educação regular. Em conformidade com o Projeto Pedagógico do Curso Técnico em Móveis Integrado, o IFFar entende a inclusão escolar como:

a garantia de acesso e permanência do estudante na instituição de ensino e do acompanhamento e atendimento do egresso no mundo do trabalho, respeitando as diferenças individuais, especificamente, das pessoas com deficiência, diferenças étnicas, de gênero, cultural, socioeconômica, entre outros (SANTA ROSA, p. 17, 2021).

Dessa forma, a Instituição também estende seu suporte aos alunos por meio da Assistência Estudantil, que se propõe a proporcionar o acesso a um ensino de qualidade para todos, reforçando a igualdade entre os estudantes. Com esse objetivo, o Instituto disponibiliza uma equipe multidisciplinar de profissionais para auxiliar neste processo, que inclui uma odontóloga, um médico, uma técnica em enfermagem, uma nutricionista, uma psicóloga, uma assistente social, uma pedagoga e assistentes de alunos.

É fundamental salientar que o acompanhamento do desenvolvimento e do progresso das aulas é realizado por meio do Sistema Integrado de Gestão de Atividades Acadêmicas (SIGAA). Este sistema é o responsável pela administração das disciplinas e pelo registro de todas as informações pertinentes à trajetória acadêmica dos alunos. O SIGAA centraliza os dados relacionados ao ensino, à pesquisa e à extensão, incluindo participações em monitorias, projetos de extensão e bolsas de iniciação científica.

Em suma, os planos de ensino são documentos que devem conter informações essenciais, como a identificação da turma do Ensino Médio Integrado e do docente, a ementa (com a descrição dos conteúdos a serem trabalhados e a bibliografia recomendada), os objetivos gerais e específicos do curso, as

metodologias a serem aplicadas pelo professor, o cronograma das aulas, os instrumentos de avaliação e os critérios que serão considerados para o desempenho dos alunos. Incluem, ainda, observações que destacam a possibilidade de flexibilização e ajustes, caso sejam necessários devido à inclusão de alunos ou outras circunstâncias imprevistas.

Portanto, essas práticas confirmam a perspectiva de Libâneo (1990), que define o planejamento escolar como uma atribuição primordial do docente. O planejamento envolve tanto a previsão das atividades pedagógicas (em termos de sua organização e coordenação em relação aos objetivos propostos), quanto a sua revisão e ajustes contínuos ao longo do processo de ensino. Ele atua não apenas como uma ferramenta de estruturação das ações do professor, mas também como um momento crucial de análise e reflexão intimamente ligado à avaliação.

Neste contexto, a instituição organiza conselhos de classe com a participação de todo o corpo docente, com o propósito de discutir detalhadamente o desempenho de cada aluno e de cada turma. No entanto, no início de cada reunião, é reservado um tempo específico para que o líder e o vice-líder da turma apresentem as demandas levantadas pelos estudantes, buscando-se chegar a um consenso sobre as possíveis soluções para essas questões.

Em seguida, a reunião prossegue exclusivamente com os professores, momento em que são realizadas as socializações e os comunicados iniciais. Logo após, iniciam-se as observações focadas no desempenho individual de cada aluno, organizadas por meio de uma planilha no Excel. Nesta planilha, os professores de cada disciplina registram classificações, indicando se os alunos estão "acima da média", "abaixo da média" ou "na média" e, caso tenha sido oferecida a recuperação paralela, quais alunos necessitam dessa intervenção específica.

Para os estudantes que demonstram necessidade de acompanhamento, são realizadas conversas prévias ao conselho de classe, envolvendo o aluno, a pedagoga e a assistente social da instituição. O objetivo é estabelecer um acordo e um plano de ação para a melhoria do desempenho. Este planejamento é, então, levado à discussão no conselho de classe, assegurando que todos os professores estejam alinhados com as decisões tomadas e possam disponibilizar oportunidades para que esses alunos realizem atividades de recuperação.

Em síntese, o Instituto Federal Farroupilha - *Campus* Santa Rosa dedica-se a proporcionar um ambiente educacional de alta qualidade e profundamente

inclusivo. A instituição busca atender às diversas necessidades de seus alunos e promover o desenvolvimento integral de cada um. Por meio de projetos pedagógicos robustos, como a Monitoria, e de metodologias flexíveis e participativas, o IFFar busca ativamente a superação das dificuldades de aprendizagem e a garantia de uma educação mais acessível, tanto para alunos com deficiência quanto para aqueles em situação de vulnerabilidade.

A instituição mantém um compromisso firme com a avaliação contínua e dinâmica do desempenho acadêmico, garantindo que todos os alunos tenham oportunidades de superar desafios e alcançar seu potencial máximo. Ao adotar ferramentas tecnológicas, como o SIGAA, o Instituto assegura uma gestão eficaz e transparente de seus processos educacionais, o que colabora significativamente para a melhoria constante da qualidade do ensino. Com a implementação de ações de suporte e a valorização das experiências prévias dos alunos, o IFFar se consolida como uma instituição engajada na formação de cidadãos críticos, responsáveis e plenamente preparados para atuar tanto no mercado de trabalho quanto na sociedade.

3 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

Os próximos tópicos detalharão a experiência de regência do estagiário no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha - *Campus* Santa Rosa. Neles, serão abordados aspectos cruciais e relevantes para a sua formação profissional e acadêmica como futuro docente. A discussão incluirá temas como a educação matemática no contexto do estágio, as características da turma, os procedimentos didáticos e metodológicos adotados, a relação entre teoria e prática na formação docente, e as reflexões e conclusões finais resultantes dessa vivência.

3.1 A Educação Matemática no Campo de Intervenção do Estágio

Neste tópico, serão apresentadas as metodologias adotadas durante o seu período de regência em uma turma de 2º ano do Curso Técnico em Móveis Integrado, composta por 33 alunos matriculados. Além disso, serão discutidos os conceitos desenvolvidos ao longo das aulas, bem como os recursos didáticos utilizados para facilitar a compreensão desses conceitos pelos estudantes.

O conteúdo programático previsto para o período de regência englobou os temas Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares. Para tal, foi elaborado um planejamento que contemplou metodologias e recursos didáticos adequados, com o objetivo de promover a construção do conhecimento de maneira eficaz e significativa para os estudantes.

Para a introdução do conteúdo sobre Matrizes, foi realizada uma atividade envolvendo a metodologia de Jogos e de Investigação Matemática, com o intuito de evidenciar as principais características das matrizes. O jogo em questão tratava-se do Sudoku, que possui formato muito semelhante ao de matrizes, permitindo fazer essa analogia.

Desta forma utilizamos a Investigação Matemática para potencializar esta atividade visto que é uma metodologia cujo objetivo central é estimular o aluno a solucionar problemas mobilizando seu conhecimento prévio. Essa abordagem não apenas incentiva o estudante a desenvolver confiança em suas próprias concepções, mas também o motiva a buscar ativamente o aprofundamento do seu saber.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), é fundamental permitir que os estudantes descubram regularidades e reconheçam

conceitos matemáticos, promovendo, assim, o desenvolvimento de habilidades como intuição, analogia, indução e dedução. Nesse contexto, evidencia-se a importância de proporcionar atividades investigativas, a fim de fomentar o pensamento crítico e o processo de construção do conhecimento entre os estudantes.

Desse modo, foi adotada uma abordagem investigativa, através de questões norteadoras, com a finalidade de que os alunos pudessem estabelecer relações do jogo com as matrizes, evidenciando as principais características inerentes a esse conceito.

A utilização de jogos como recurso didático introduz uma abordagem lúdica que eleva o interesse dos alunos, especialmente em Matemática, onde é comum a manifestação de dificuldades. Além de motivadora, essa estratégia desafia os estudantes, pois a participação adequada na atividade exige a correta compreensão do conteúdo, permitindo-lhes aplicar o conhecimento de forma fluida.

Nesse contexto, as aulas que incorporam jogos oferecem distintas maneiras de pensar e articular conhecimentos, possibilitando aos alunos fazer inferências e identificar suas próprias dificuldades em relação ao conteúdo. Além desses benefícios, os jogos têm conquistado cada vez mais espaço nas salas de aula, conforme observa a autora Lara:

Os jogos, ultimamente, vêm ganhando espaço dentro de nossas escolas numa tentativa de trazer o lúdico para dentro da sala de aula. A pretensão da maioria dos professores com a sua utilização é a de tornar as aulas mais agradáveis com o intuito de fazer com que a aprendizagem torne-se algo fascinante (LARA, 2004, p.1).

Os jogos didáticos, nesse sentido, potencializam a interação entre os colegas, fomentando a representação, criatividade, motivação, espontaneidade e até mesmo o prazer, o que melhora a interação geral entre professor e aluno. Para além dos jogos manuais e concretos, é possível enriquecer essa abordagem com tecnologias digitais, utilizando *softwares* e jogos eletrônicos como recursos pedagógicos. Estes últimos são cruciais para auxiliar os estudantes a desenvolver habilidades de seleção, análise, crítica, comparação, avaliação, síntese, comunicação e informação.

Desse modo, as tecnologias digitais se apresentam como um fator de facilitação no ambiente educacional, visto que sua incorporação auxilia na implementação de novas práticas pedagógicas. Conforme indicam Araújo (2020) e Leite (2020), isso resulta no surgimento de diferentes perspectivas educacionais e em mudanças significativas no processo de ensino e de aprendizagem. Em termos práticos, elas viabilizam a exploração de diversos conceitos matemáticos – que podem ser analisados, observados e desenvolvidos em *softwares* específicos – conferindo maior criatividade e dinamismo às aulas.

Os recursos de jogos e tecnologias digitais foram, portanto, integrados à metodologia Expositiva e Dialogada. Essa abordagem consiste na exposição do conteúdo com a participação ativa dos estudantes, na qual o professor assume o papel de mediador. Sua função é instigar o diálogo e estimular os alunos a compartilhar seus conhecimentos prévios em resposta às proposições discutidas em sala de aula.

Ausubel propõe que os conhecimentos prévios dos alunos sejam valorizados, para que possam construir estruturas mentais utilizando, como meio, mapas conceituais que permitem descobrir e redescobrir outros conhecimentos, caracterizando, assim, uma aprendizagem prazerosa e eficaz (PELIZZARI et al, 2002, p. 37).

Ressalta-se, portanto, a importância dessa metodologia, especialmente quando aliada a outras abordagens, na criação de aulas que estimulem reflexões e discussões. Essa prática não só incentiva os alunos a demonstrarem seus interesses e saberes, mas também os motiva a buscar mais informações, preparando-os de forma ativa para debater sobre diversos temas.

Em suma, observa-se a relevância e o desafio para o docente ao empregar metodologias diversas no ambiente escolar, tendo em vista a necessidade de identificar aquelas que melhor se adequam ao perfil de seus alunos. Além disso, o professor quando realiza abordagens diferentes, proporciona aos estudantes o protagonismo no processo de aprendizagem, assim como promove a abertura para diálogos construtivos acerca do conteúdo abordado.

3.2 A turma do Estágio

A turma na qual foi desenvolvido o período de regência é composta por 33 alunos. A maioria deles possui 17 anos de idade e residem em Santa Rosa e nos municípios da região. A classe se destaca por ser bastante participativa e comunicativa, demonstrando constante interação e colaboração com as proposições expostas pelo professor.

Embora a maioria dos alunos apresente facilidade na matemática básica, eles não se limitaram a esse conhecimento, mantendo-se proativos na busca pelo aprendizado do conteúdo proposto. Adicionalmente, evidencia-se o papel fundamental do professor como mediador, responsável por estimular e encorajar os estudantes, prevenindo, assim, a falta de interesse e o desânimo no acompanhamento das aulas.

As observações em sala e as conversas com o professor regente permitiram constatar o grande entusiasmo dos alunos em participar das aulas. A maioria dos estudantes trabalhou de forma cordial e colaborativa em grupo, compartilhando ideias e contribuindo significativamente para o progresso coletivo da turma.

É fundamental reconhecer que cada aluno possui particularidades e ritmos de aprendizagem que demandam constante aprimoramento. Além da necessidade de considerar essas variações pedagógicas internas, deve-se atentar para o fato de que alguns estudantes lidam com desafios pessoais, fora do ambiente escolar, enquanto outros apresentam defasagens em seu processo de aprendizagem.

Dessa forma, é fundamental que o docente mantenha um foco contínuo em sua formação para conseguir compreender os novos contextos e as gerações que ingressam nas escolas. Torna-se imprescindível a realização de estudos que complementem o conhecimento do educador, visando promover a inclusão, o envolvimento, a reflexão e a aprendizagem efetiva nas salas de aula.

3.3 Os Procedimentos Didáticos Metodológicos do Estágio

O Estágio Curricular Supervisionado teve início com a realização de estudos e observações sobre a turma e a escola. Posteriormente, procedeu-se à organização do cronograma de aulas, o qual detalha a agenda do período de regência, bem como os conteúdos, recursos e metodologias a serem empregados.

Ademais, foi elaborado o plano de ensino, que especifica os temas e conteúdos da área da matemática, os objetivos gerais e específicos que orientam o estágio, os recursos e critérios de avaliação, bem como um cronograma detalhado das atividades a serem realizadas em sala de aula. Para o desenvolvimento do período de regência, foram elaborados dez planos de aula, totalizando vinte horas de regência de classe.

Com base nesse contexto, o período de regência buscou uma abordagem dinâmica e interativa do conteúdo, priorizando a aplicação prática da Matemática no cotidiano por meio de jogos e atividades investigativas, mantendo ainda a abordagem formal dos conceitos. Para isso, foram empregadas as metodologias de Investigação Matemática, Jogos e Método Expositivo e Dialogado. Tais estratégias visaram promover uma aprendizagem significativa, incentivando o engajamento e favorecendo a compreensão contextualizada dos conceitos.

O primeiro contato com a turma ocorreu no dia 4 de setembro de 2025 (Apêndice I - Plano de Aula 01), incluiu a apresentação do estagiário, a definição de combinados e uma conversa inicial. Nela, os estudantes foram convidados a informar seus nomes, idades, interesse pela Matemática e expectativas para o trimestre. A análise das respostas revelou que a faixa etária predominante era de 17 anos (variando entre 16 e 17 anos). Quando questionados sobre a disciplina, muitos expressaram aversão à Matemática, justificando a dificuldade de compreensão e de aplicação prática no dia a dia. Contudo, os estudantes demonstraram expectativa de grande aprendizado com o estagiário no decorrer do trimestre.

Para dar início ao conteúdo, foi proposta uma atividade mediante o uso da metodologia de jogos, onde foram entregues grades de Sudoku (Figura 2). O sudoku é um jogo de lógica que consiste em preencher as grades 9x9 com números de 1 a 9, sem repetir nas linhas colunas e nas grades menores (3x3). A turma foi organizada em grupos, cada um recebendo uma grade de sudoku diferente.

Figura 2 - Grade de Sudoku

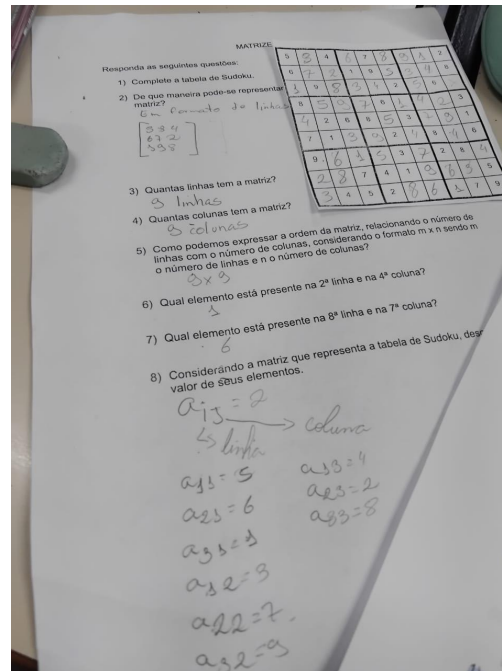
5		4		7				2
6			1	9				8
	9				2		6	
8				6				3
	2	6	8		3			1
7	1			2		8		6
9				3		2	8	
		7	4	1				5
	4	5	2				7	9

Fonte: Dados do estágio, 2025.

Inicialmente, foi orientado que os alunos completassem as grades de sudoku. Nessa atividade, os grupos completaram em até 20 minutos, com alguns grupos pedindo algumas dicas em relação ao preenchimento das grades 3x3. Os alunos tiveram bastante facilidade em realizar a atividade, principalmente, porque já conheciam o jogo e, inclusive, uma das alunas tinha em mãos um livro de problemas de Sudoku. Na sequência, o estagiário fez o questionamento sobre a relação entre o sudoku e matrizes. A maioria dos alunos relataram nunca ter ligado sudoku com o conteúdo de matrizes. Nesse momento, o professor discutiu com os alunos que eles já haviam visto matrizes anteriormente, por meio de tabelas, gráficos e ferramentas do Excel, uma vez que estes representam matrizes em formato de dados.

Para aprofundar o entendimento, foi proposta uma abordagem investigativa através de um material impresso contendo questões norteadoras. Estas questões tinham como objetivo instigar os alunos a analisarem o jogo de sudoku e identificar características inerentes das matrizes, fazendo um comparativo entre jogo e conceito. Nesta atividade, os alunos não tiveram dificuldades para responder as questões (Figura 3), uma vez que eles tiveram facilidade em identificar linhas, colunas e elementos das matrizes, além da representação matricial que foi possível através da visualização e análise das grades de sudoku.

Figura 3 - Folha de questões norteadoras



Fonte: Dados do estágio, 2025.

Nesta fase, o diálogo mostrou-se crucial. A cada questão respondida por um grupo, abrimos o debate para que todos pudessem conferir, corrigir e assimilar a nomenclatura formal. Essa constante socialização das respostas permitiu que o estagiário avaliasse a compreensão em tempo real e consolidasse o conhecimento. O desenvolvimento da aula culminou na exploração da Igualdade de Matrizes. Foi apresentada a definição formal e, na sequência, os alunos foram desafiados a aplicarem o conceito na resolução de sistemas simples para determinar elementos desconhecidos. Ao final dos dois períodos, notou-se que a combinação das metodologias ativas garantiu um alto nível de participação e entendimento, cumprindo os objetivos de introduzir Matrizes de forma aplicada e significativa. Como fechamento, foi solicitada uma pesquisa sobre algumas matrizes especiais para serem apresentadas na aula seguinte.

Na segunda semana (Apêndice I - Plano de Aula 02), a aula foi conduzida por meio do Método Expositivo e Dialogado, essencial para apresentar as definições formais das Matrizes Especiais (como Matriz Linha, Coluna, Nula, Quadrada, Identidade e Transposta). Iniciou-se com uma breve revisão dos conceitos de ordem e representação genérica, fazendo a ponte com a aula anterior. Em seguida, a introdução de cada tipo de matriz especial foi feita de maneira dialógica: ao apresentar a definição, o estagiário solicitava exemplos práticos aos próprios alunos,

garantindo que a explicação fosse interativa e a assimilação dos conceitos ocorresse em conjunto.

O momento crucial da aula foi a aplicação dos conceitos, através de uma lista de exercícios contextualizados e de múltipla escolha. Este recurso foi empregado para atingir o objetivo de reconhecer e identificar as características dos tipos de matrizes. Um dos exercícios propostos, por exemplo, utilizava uma tabela de relações ecológicas entre espécies, solicitando a associação à sua correta lei de formação, o que exigiu dos alunos não apenas a identificação da ordem, mas a análise da condição lógica que define cada elemento.

Outra atividade essencial envolveu o julgamento de afirmativas sobre as matrizes, desafiando os estudantes a diferenciarem as características de, por exemplo, uma Matriz Linha de uma Matriz Coluna. Essa etapa, realizada individualmente, permitiu ao estagiário circular pela sala, oferecendo suporte e realizando intervenções pontuais.

Na semana seguinte (Apêndice I - Plano de Aula 03), a aula teve foco no conteúdo de operações com matrizes (adição, subtração e multiplicação por escalar). A primeira parte da aula foi dedicada à introdução formal das operações, utilizando o Método Expositivo e Dialogado. As regras de Adição e Subtração foram apresentadas, reforçando a condição obrigatória de matrizes de mesma ordem. A Multiplicação por Escalar seguiu a mesma lógica, sendo rapidamente ilustrada com exemplos práticos no quadro, resolvidos com a participação ativa dos alunos. Esse diálogo constante foi essencial para corrigir eventuais equívocos de cálculo em tempo real e assegurar a compreensão dos pré-requisitos.

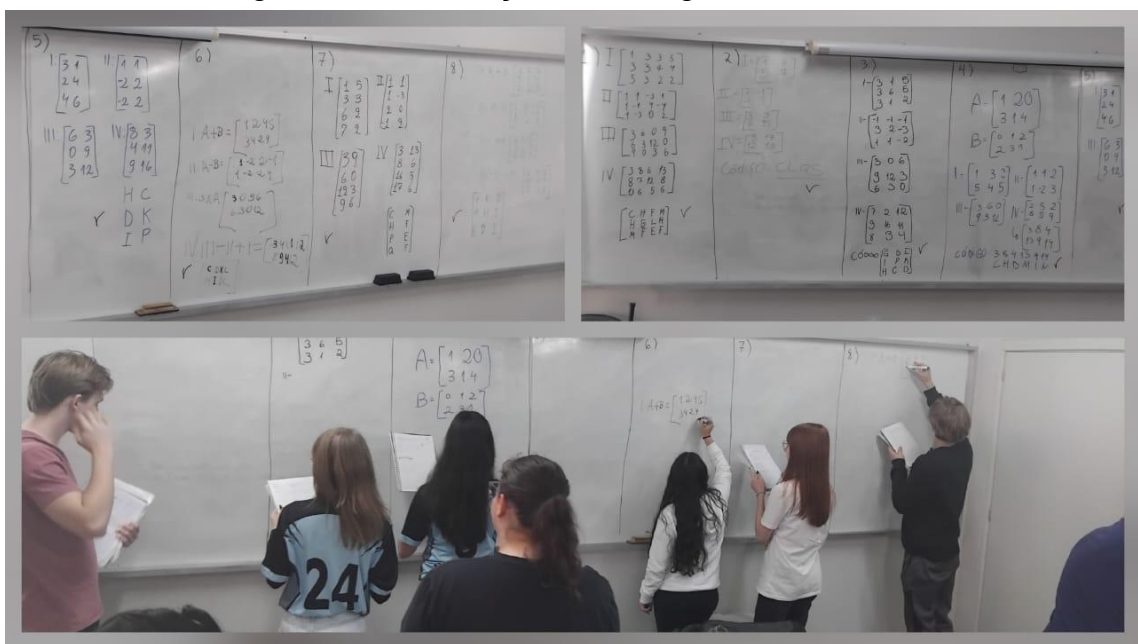
Em seguida, o foco metodológico migrou para a Investigação Matemática e a Resolução de Problemas. A aplicação desses métodos visou desenvolver a autonomia dos alunos no enfrentamento dos desafios. Conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p.11), as investigações matemáticas são cruciais, pois exigem dos alunos as capacidades de "explorar, conjecturar, examinar exemplos, verificar e justificar resultados", indo além da simples execução de algoritmos.

O ponto culminante desta aula e a atividade de consolidação foi o Desafio: Código Secreto de Matrizes. Este desafio exigiu dos alunos, organizados em grupos, que resolvessem uma sequência de operações complexas para que os elementos resultantes da matriz final correspondessem a letras específicas, decifrando assim o código. Para esta atividade, foi disponibilizado um tempo para realizar as operações

e, em seguida, cada grupo foi solicitado a compartilhar as respostas na lousa (Figura 4).

A atividade promoveu um ambiente de competição e cooperação intenso, pois era necessário que os estudantes respeitassem as regras de cada operação e, finalmente, utilizassem a matriz decifrada como chave. O Desafio funcionou como uma avaliação diagnóstica lúdica e contextualizada, garantindo que o aprendizado das operações matriciais fosse completo e significativo.

Figura 4 - Socialização dos códigos das matrizes



Fonte: Dados do estágio, 2025.

Na quarta semana (Apêndice I - Plano de Aula 04), a aula foi centrada nos conceitos de Multiplicação entre Matrizes e Matriz Inversa. O primeiro momento, expositivo, permitiu ao estagiário apresentar as regras formais para a multiplicação e o conceito de Matriz Inversa através da propriedade $A \cdot A^{-1} = I$. Essa base teórica sólida, apoiada pelo material impresso, assegurou que todos os alunos tivessem o referencial conceitual necessário antes de avançar para a prática.

O engajamento dos alunos atingiu seu ponto máximo com a introdução dos exemplos e, principalmente, durante a *Atividade 3*, destinada à resolução de exercícios. A metodologia expositiva e dialogada foi essencial para transformar a sala em um ambiente de construção ativa. O professor estagiário não apenas desenvolveu o conteúdo, mas agiu como um facilitador, incentivando

questionamentos imediatos e a participação na resolução coletiva dos sistemas de equações usados para determinar a Matriz Inversa. Essa interatividade mitigou o risco de que a matemática se tornasse apenas uma lista de fórmulas, garantindo que os estudantes realmente se comprometessem com a compreensão dos processos lógicos por trás dos cálculos.

A qualidade da interação pedagógica estabelecida entre o acadêmico e a turma foi um fator de sucesso. A postura do professor estagiário demonstrou um profundo respeito pelo tempo de aprendizado de cada aluno, permitindo que as dúvidas fossem sanadas durante a verificação dos passos de cada exemplo. Essa dinâmica colaborativa reflete a essência do pensamento de educadores que valorizam a autonomia discente. Conforme a citação de Freire (1996, p.35), um pilar da pedagogia brasileira: "Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção." A aula concretizou essa ideia ao guiar os alunos da recepção passiva de informações para a produção ativa de soluções matemáticas.

Na semana seguinte (Apêndice I - Plano de Aula 05), foi introduzido à turma um novo conteúdo: Determinantes. A aula iniciou com a Atividade 1, onde foram apresentadas as definições e as regras básicas para o cálculo de determinantes de matrizes de ordem 1 e 2. O caráter linear e direto dessas ordens permitiu uma breve exposição e uma transição rápida para exemplos práticos, mantendo a atenção dos estudantes. O engajamento aumentou significativamente com a introdução da Matriz de Ordem 3, exigindo a aplicação da Regra de Sarrus (Atividade 2). Neste momento, a mediação do professor estagiário foi intensificada, desmembrando o cálculo complexo em etapas sequenciais e visuais no quadro, o que se mostrou fundamental para a compreensão dos fluxos de multiplicação e soma.

O ponto crucial da aula se deu na Atividade 3, a de Resolução de Exercícios, que funcionou como um catalisador do método Dialogado. Ao invés de apenas corrigir os exercícios, os alunos foram incentivados a apresentar suas resoluções, debater métodos alternativos e esclarecer dúvidas entre si, sob a supervisão do estagiário. Essa dinâmica reflete o princípio socioconstrutivista, que valoriza a interação entre pares e a mediação. Conforme Vygotsky pontua,

O aprendizado pressupõe uma natureza social específica e um processo por meio do qual as crianças penetram na vida intelectual daqueles que as cercam (VYGOTSKY, 2003, p. 115).

A troca de conhecimento e a colaboração no ambiente de sala de aula permitiram que os estudantes operassem em sua Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), avançando no conceito com o apoio dos colegas e do estagiário.

Os objetivos propostos, de reconhecer e aplicar os procedimentos de cálculo, foram plenamente alcançados. A eficácia da abordagem metodológica residiu na sua capacidade de fazer com que os alunos não apenas memorizassem uma fórmula, mas a vivenciassem através da prática. Essa perspectiva está em linha com a filosofia de John Dewey, para quem a experiência é central no processo educativo. Dewey argumenta que “A verdadeira experiência educativa e significativa só ocorrerá no ambiente de experimentação” (DEWEY, 1979, p. 152). Ao aplicar os determinantes na resolução de problemas da lista de exercícios (que englobavam inclusive a identificação de matrizes não inversíveis), os estudantes transformaram a teoria em um conhecimento funcional e inteligente, atendendo à habilidade da BNCC (EM13MAT301) de resolver problemas que envolvam equações lineares. Nesse sentido, a aula consolidou a percepção de que a clareza e a paciência na mediação de conteúdos complexos, aliadas a uma metodologia que estimule a experimentação ativa e a interação social, são pilares essenciais para o sucesso da prática docente em Matemática.

Na sexta semana (Apêndice I - Plano de Aula 06), foi introduzido outro conteúdo novo: sistemas lineares. Iniciou-se com a Atividade 1, revisando o conceito de Equações Lineares e introduzindo os métodos de Resolução Algébrica (Substituição, Adição e Comparação). Nesse ínterim, o estagiário buscou incentivar os alunos a debater qual método seria o mais eficaz para cada tipo de sistema, estimulando o raciocínio estratégico.

O grande momento de consolidação ocorreu na Atividade 2, que utilizou o *software* Geogebra (Figura 5). Inicialmente, a proposta era conduzir a turma ao laboratório de informática, entretanto, em virtude da correção de várias questões encaminhadas na aula anterior, o tempo restante era curto, então, a atividade foi realizada em sala de aula com utilização do celular para acesso rápido e prático. Essa ferramenta tecnológica permitiu que os alunos visualizassem geometricamente as soluções encontradas, correlacionando o ponto de intersecção das retas com a classificação do sistema linear (SPD, SPI ou SI).

Figura 5 - Visualização gráfica no Geogebra



Fonte: Dados do estágio, 2025.

A transição do abstrato (álgebra) para o concreto (gráficos) foi fundamental. Para Jean Piaget, a construção do conhecimento se dá pela ação do sujeito sobre o objeto e a adaptação das estruturas cognitivas. A visualização gráfica proporcionada pelo Geogebra funcionou como um potente objeto de ação, exigindo que os estudantes reorganizassem suas estruturas mentais. Nesse sentido, Piaget afirma que

O organismo adapta-se construindo materialmente novas formas para inseri-las nas do universo, [a inteligência] prolonga tal criação construindo, mentalmente, as estruturas suscetíveis de aplicarem-se às do meio (PIAGET, 1956, p. 57).

Ao experimentar no *software*, o aluno internalizou a classificação dos sistemas de forma ativa e não apenas por memorização.

A aula foi finalizada com a Atividade 3, que envolveu a resolução de problemas do cotidiano que poderiam ser modelados por sistemas lineares. Essa etapa cumpriu o objetivo de conectar a Matemática à realidade, provando que os conceitos aprendidos não eram apenas exercícios de quadro, mas ferramentas práticas.

Na semana seguinte (Apêndice I - Plano de Aula 07), foi dada sequência no conteúdo de sistemas lineares, fazendo uma breve revisão sobre sistemas lineares 2×2 e transitando para os sistemas lineares 3×3 . A aula foi iniciada com a Atividade

1 (Revisão), resgatando rapidamente os métodos de resolução de sistemas 2×2 (adição, substituição), que estavam frescos na memória dos alunos. Essa retomada foi intencional para gerar uma "ancoragem" do conhecimento prévio antes de mergulhar no novo e mais complexo conteúdo.

Em seguida, na Atividade 2 (Regra de Cramer), foi apresentada a teoria. O professor optou por desmembrar a Regra de Cramer, explicando primeiro o conceito de Determinante Principal (D) e depois os determinantes das variáveis (D_x , D_y , D_z). Foi um momento de intensa exposição e prática guiada no quadro. A clareza e a repetição sistemática da Regra de Sarrus, agora aplicada em quatro momentos distintos, foram cruciais para que a turma internalizasse a estrutura. O maior desafio era manter o foco e evitar que os alunos se perdessem nos detalhes algébricos, que são propensos a erros de sinal.

A finalização se deu na Atividade 3, onde utilizamos exercícios contextualizados, como o problema de balança de pesos (Problema 3), para dar um significado concreto ao sistema 3×3 . Ao verem a Regra de Cramer como uma ferramenta para resolver um problema de pesagem ou de preços (Problema 2), a Matemática deixou de ser uma abstração e se tornou uma solução.

Na oitava semana (Apêndice I - Plano de Aula 08), os alunos foram desafiados a aprender outro método de resolução para sistemas lineares 3×3 : o Escalonamento. A aula iniciou com a Atividade 1, definindo o que é um sistema escalonado e a Matriz Completa do Sistema. A transição da representação do sistema para a matriz estendida foi crucial, pois deslocou o foco dos alunos das incógnitas individuais para as linhas e colunas da matriz. Essa mudança de perspectiva é fundamental para o sucesso do método.

A Atividade 2 foi primordial, pois foram apresentadas as três operações elementares (troca de linhas, multiplicação por um escalar não nulo, e soma de uma linha com o múltiplo de outra) e sua aplicação passo a passo para transformar um sistema 3×3 complexo em sua forma escalonada. A ênfase foi no objetivo de zerar os coeficientes abaixo da diagonal principal. Essa mediação foi conduzida de forma dialógica, pedindo constantemente aos alunos que sugerissem qual seria a próxima operação mais eficiente, transformando o algoritmo em uma escolha estratégica conjunta.

Essa abordagem dialógica e de construção conjunta do algoritmo está em perfeita consonância com a Pedagogia de Paulo Freire, o qual criticava a *educação bancária*, onde o professor simplesmente "deposita" o saber. Ele defendia a educação como um ato de conhecimento, no qual "O educador se torna co-construtor do saber, e os educandos, por sua vez, são co-educadores. O diálogo é a porta de entrada para essa construção" (FREIRE, 1996, p. 55). Ao serem convidados a participar ativamente na tomada de decisão sobre as operações de linha, os alunos deixaram de ser meros receptores e se tornaram agentes na resolução do problema. A finalização na Atividade 3 serviu para consolidar o método. Os alunos aplicaram o escalonamento em exercícios práticos, descobrindo que este método era significativamente mais rápido e menos propenso a erros de sinal do que a Regra de Cramer, especialmente após dominarem as operações elementares. O sucesso da aula pode ser analisado também sob a ótica de Jean Piaget, que via a aprendizagem como um processo de *assimilação* e *acomodação*. Ao apresentar uma nova ferramenta (Escalação) para um problema conhecido (Sistemas Lineares), os estudantes foram instigados a acomodar suas estruturas cognitivas, construindo um novo esquema de ação mental para resolver sistemas. Piaget afirma que "O conhecimento não é uma cópia da realidade, mas uma construção da experiência" (PIAGET, 1970, p. 14). A manipulação consciente das linhas da matriz foi a experiência que garantiu a construção desse novo saber.

Na semana seguinte (Apêndice I - Plano de Aula 09), foi desenvolvido o trabalho avaliativo em duplas com peso 7, sendo antecedido por uma breve revisão dos conteúdos. A revisão foi dedicada a percorrer os conteúdos principais: operações com matrizes (adição, multiplicação), cálculo de determinantes (Sarrus) e os três métodos de resolução de sistemas lineares (2×2 e 3×3) – Algébrico, Cramer e Escalonamento. O ambiente foi de debate aberto, incentivando os alunos a questionarem e a escolherem os exercícios mais desafiadores do material para resolução coletiva. Essa fase de revisão é essencialmente formativa, buscando a "tomada de consciência" do aprendizado por parte do estudante.

Essa dinâmica dialogada e de autoavaliação reflete a visão de Celso Vasconcellos sobre a avaliação como um processo contínuo. Vasconcellos argumenta que a avaliação não deve ser um ato terminal e punitivo, mas sim um momento de *diagnóstico* e *intervenção*. Ele enfatiza que "A avaliação, na perspectiva de uma prática transformadora, precisa ser entendida como um instrumento para a

tomada de decisões” (VASCONCELLOS, 2005, p. 74). Ao resolver as dúvidas e retomar os pontos fracos antes da prova, a avaliação serve como um guia para ação docente e para a recuperação imediata do aprendizado dos alunos.

Após a revisão, foi desenvolvido o trabalho avaliativo, elaborado para contemplar diferentes níveis de complexidade, exigindo dos alunos não apenas a mera reprodução de algoritmos (como o cálculo de um determinante), mas também a aplicação estratégica em problemas contextualizados e a análise de sistemas 3 x 3 por diferentes métodos.

Durante o trabalho, muitos alunos tiveram bastantes dúvidas e, ocasionalmente, questionavam ao professor, sendo recebidos com orientações em relação ao desenvolvimento da questão, sem explicitar os cálculos a utilizar. Os alunos tiveram cerca de uma hora para realizar o trabalho, sendo disponibilizado o horário de intervalo, para que pudessem terminar o que faltava.

Neste trabalho, a maioria da turma foi muito bem, com notas acima de 70% do peso total, um grupo gabaritou e apenas dois tiveram suas notas próximas a 50 e 60% da nota. Apesar desse desempenho, uma das questões propostas teve uma quantidade significativa de erros: a questão 4 (Figura 6).

Figura 6 - Questão 4 do Trabalho

$$4) \text{ Se } \mathbf{a} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}, \mathbf{b} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 10 \end{vmatrix}, \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \\ \text{calcule o valor de } a^2 + 3b - 2c.$$

Fonte: Plano de aula 9, 2025.

A questão 4 apresentava as matrizes $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$, cada uma com os elementos entre barras verticais, o que representa determinantes, e pedia para calcular a expressão $a^2 + 3b - 2c$. A seguir, é apresentada a resolução do aluno M e do aluno P (Figura 7), demonstrando a divergência de respostas que houve na turma:

Figura 7 - Resolução da questão 4: aluno M e aluno P

4)

$$a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 \\ -2 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) & -2 \cdot 3 + 5 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 18 \\ -12 & 19 \end{pmatrix}$$

$$3b = \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 9 & 30 \end{pmatrix} \quad -2c = \begin{pmatrix} -4 & -16 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad X$$

$$a^2 + 3b - 2c = \begin{pmatrix} -5 & 18 \\ -12 & 19 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 9 & 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -16 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 20 \\ -3 & 51 \end{pmatrix}$$

4)

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 3 \cdot (-2) = 11$$

$$b = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 2 \cdot 10 - 6 \cdot 3 = 2$$

$$c = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 8 \cdot 0 = -2$$

$$a^2 + 3b - 2c = 11^2 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-2) = 121 + 6 + 4 = 131$$

Fonte: Dados do estágio, 2025

Pode-se observar que o aluno M acertou a questão utilizando o procedimento correto, uma vez que a questão pedia para calcular o determinante das matrizes e substituir os valores na expressão, obtendo como resposta 131. Já o aluno P acabou errando a questão ao confundir a representação de matrizes (parênteses e colchetes) com a de determinantes (barras verticais), isto é, um erro conceitual. Percebe-se que o aluno não interpretou corretamente a representação do enunciado, pois não calculou o determinante e fez as operações da expressão diretamente com as matrizes, obtendo ao final do cálculo uma matriz 2 x 2 e não um escalar como resultado. É importante destacar que já havia sido mencionado nas aulas que existem representações diferentes para as matrizes e para os determinantes, entretanto, boa parte dos alunos acabou esquecendo esse detalhe. Pensando nisso, além de reiterar acerca da representação, seria ideal propor mais exercícios que trazem essa distinção entre as representações, proporcionando ao aluno maior clareza e capacidade de distingui-las.

Na última semana de aula (Apêndice I - Plano de Aula 10), a turma teve outro momento avaliativo, desta vez com uma prova individual com peso 10. Inicialmente, foi realizada a devolutiva dos trabalhos da semana anterior e uma

breve revisão dos conceitos estudados ao longo do estágio. A prova exigiu a capacidade de transformação algébrica (transformar um problema contextualizado em um sistema linear, como o de produção de mesas e cadeiras) e a aplicação estratégica dos métodos de resolução (Cramer, Escalonamento). O sucesso neste momento dependia da capacidade do aluno de ir além da memorização e demonstrar proficiência na escolha do método mais eficiente.

Essa exigência de raciocínio estratégico na prova alinha-se à teoria das Múltiplas Inteligências de Howard Gardner. O teste final mediu diretamente a Inteligência Lógico-Matemática, que é a capacidade de analisar problemas de forma lógica e realizar operações matemáticas. Gardner (1983) argumenta que a inteligência é demonstrada na capacidade de resolver problemas e criar produtos valorizados culturalmente. A prova, ao demandar a escolha consciente entre Escalonamento e Regra de Cramer para sistemas 3×3 , exigiu uma demonstração de raciocínio sofisticado, confirmando que os alunos desenvolveram a habilidade de analisar e sintetizar informações de forma eficaz, indo além do mero cálculo.

Nesta prova, os alunos também tiveram muitas dúvidas, principalmente em relação aos métodos de resolução de sistemas 3×3 . Apesar de ter sido feita uma revisão antes da prova, os alunos ainda ficavam indecisos entre qual método utilizar para desenvolver as questões. Entre as questões da prova, a questão 10 (Figura 8) foi uma que exigiu que os alunos utilizassem o método de escalonamento para resolver o problema.

Figura 8 - Questão 10 da Prova

10) Uma nutricionista elabora dietas para três pacientes (P_1, P_2, P_3), utilizando uma combinação de três tipos de alimentos: Alimento A (a), Alimento B (b) e Alimento C (c). Os pesos (em gramas) consumidos por cada paciente em um dia, juntamente com o total de calorias (Kcal) ingeridas, estão na tabela:

Paciente	Alimento A (a)	Alimento B (b)	Alimento C (c)	Total de Calorias
P_1	100 g	100 g	100 g	600 Kcal
P_2	200 g	100 g	300 g	1100 Kcal
P_3	100 g	200 g	100 g	800 Kcal

Considerando a, b e c como o valor calórico por 100 gramas de cada alimento, utilize o **Método de Escalonamento** para resolver o sistema e determine o valor calórico total de uma porção de 100g de Alimento A, 100g de Alimento B e 200g de Alimento C.

Fonte: Plano de aula 10, 2025.

Essa questão trazia um problema relacionado a dieta, com 3 tipos de alimento A, B e C, pedindo que o aluno utilizasse o método de escalonamento para descobrir o valor calórico de cada alimento. A seguir, são apresentadas as resoluções dos alunos G e K (Figura 9):

Figura 9 - Resolução da questão 10: aluno G e aluno K

The image shows two handwritten solutions for a system of three linear equations in three variables. The system is:

$$\begin{cases} a + b + c = 600 \\ a + 2b + c = 1100 \\ a + 2b + c = 800 \end{cases}$$

Student G's solution (top):

The student writes the system and then performs row reduction on the augmented matrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 2 & 1 & 3 & 1100 \\ 1 & 2 & 1 & 800 \end{array} \right]$$

Row operations performed:

- $L_2 = L_2 - 2L_1$ resulting in $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & -1 & 1 & 100 \\ 1 & 2 & 1 & 800 \end{array} \right]$
- $L_3 = L_3 - L_1$ resulting in $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & -1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 200 \end{array} \right]$

From the second row, $-b + c = 100 \Rightarrow c = 100 + b$. Substituting $b = 200$ (found from the third row) into the equation for c :

$$c = 100 + 200 = 300$$

Substituting $b = 200$ and $c = 300$ into the first equation:

$$a + 200 + 300 = 600 \Rightarrow a = 600 - 200 - 300 = 100$$

Finally, the total calories are calculated:

$$a + b + 2c = 100 + 200 + 2 \cdot 300 = 900 \text{ Kcal}$$

Student K's solution (bottom):

The student writes the system and then performs row reduction on the augmented matrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 2 & 1 & 3 & 1100 \\ 1 & 2 & 1 & 800 \end{array} \right]$$

Row operations performed:

- $L_2 = L_2 - 2L_1$ resulting in $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & -1 & 1 & -100 \\ 1 & 2 & 1 & 800 \end{array} \right]$
- $L_3 = L_3 - L_1$ resulting in $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & -1 & 1 & -100 \\ 0 & 1 & 0 & 200 \end{array} \right]$

From the second row, $-b + c = -100 \Rightarrow c = -100 + b$. Substituting $b = 200$ (found from the third row) into the equation for c :

$$c = -100 + 200 = 100$$

Substituting $b = 200$ and $c = 100$ into the first equation:

$$a + 200 + 100 = 600 \Rightarrow a = 600 - 200 - 100 = 300$$

Finally, the total calories are calculated:

$$a + b + 2c = 300 + 200 + 2 \cdot 100 = 700 \text{ Kcal}$$

Fonte: Dados do estágio, 2025.

Observa-se que ambos os alunos montaram o sistema corretamente e realizaram a transposição dos dados para uma matriz completa. Entretanto, ao realizar as operações entre linhas, o aluno G cometeu um erro operacional ao fazer o cálculo do último termo da linha 2, visto que na subtração $1100 - 2 \cdot 600$, resulta em -100 , no qual o aluno esqueceu de colocar o sinal negativo antes do 100. Assim, ao calcular as calorias, ele obteve um valor diferente na incógnita b , obtendo o valor errado ao final da expressão. Nesse caso, para evitar que aconteça esse erro, o aluno poderia ter realizado a prova real, substituindo os valores em pelo menos uma das equações originais para verificar o erro e refazer o cálculo algébrico.

A turma, no geral, teve um desempenho bem diferente comparado ao trabalho, sendo a maioria com uma nota variando entre 5 e 7, quatro gabaritos e um número maior de alunos com nota inferior a 5.

Naquele que seria o último dia de aula, um dia após a avaliação final, o estagiário realizou a devolutiva das provas, um momento que serviu como um balanço final do esforço e do aprendizado da turma. O sentimento geral na sala era de conclusão. Ao final da sessão, o estagiário fez questão de expressar seu profundo agradecimento à turma pela colaboração e pela energia demonstrada ao longo de todo o período de estágio. Para ele, acompanhar o desenvolvimento dos alunos foi uma experiência enriquecedora que contribuiu significativamente para sua formação. O estagiário encerrou reforçando a convicção de que a dedicação e o potencial dos estudantes os levarão a grandes conquistas no futuro.

3.4 A Relação Teoria e Prática na Formação do Professor

A experiência vivenciada durante o período de regência demonstrou, que a formação docente requer a integração indissociável entre teoria e prática. Essa articulação é fundamental para que o futuro professor desenvolva a didática e a sensibilidade necessárias para atuar em sala de aula. É no ambiente prático que a escola efetiva suas ações e cumpre seu papel transformador, conforme ressalta Libâneo (1994), ao afirmar que são as práticas educativas que, de fato, têm o poder de determinar as ações da escola e seu comprometimento social com o processo de transformação.

A relevância do Estágio Supervisionado na trajetória do futuro professor é, portanto, inquestionável. Trata-se de uma atividade que, segundo Oliveira e Cunha (2006), permite ao acadêmico construir uma experiência profissional sólida e um currículo de significativa importância para sua futura inserção no mercado de trabalho. Além de seu valor pedagógico e formativo, o Estágio é uma exigência legal estabelecida pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), nº 9.394/96, com uma carga horária mínima a ser cumprida, complementada pela participação em reuniões e demais atividades institucionais.

Em síntese, o estágio supervisionado se configura como o componente curricular onde o licenciando aprofunda e vivencia as práticas da profissão, uma carreira que carrega uma enorme responsabilidade devido à influência que o professor exerce sobre seus alunos. Mafuani (2011) descreve o estágio como um treinamento que permite aos estudantes experienciar, na prática, os conhecimentos construídos ao longo da graduação, transformando teoria em ação pedagógica.

Neste contexto, é impossível desvincular o Estágio da importância da formação continuada. O educador precisa manter-se constantemente atualizado e bem-informado, não apenas sobre os acontecimentos globais, mas, sobretudo, em relação aos conhecimentos curriculares, às novas tendências pedagógicas e ao domínio pleno do conteúdo a ser ensinado.

Dessa forma, tanto o processo inicial de aprender a profissão docente (Estágio) quanto a continuidade dessa prática (Formação Continuada) fazem parte do ciclo essencial do professor. É por meio dessa dinâmica ininterrupta que o profissional conseguirá, consistentemente, estabelecer a ligação orgânica entre teoria e prática (FILHO, 2010), garantindo uma atuação cada vez mais eficaz e reflexiva.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Estágio Supervisionado representa um marco de extrema importância na formação do acadêmico, especialmente para aqueles que iniciam o contato direto com o ambiente escolar. A vivência no período de regência constitui um aprendizado significativo, proporcionando ao licenciando a compreensão da dimensão de sua profissão: a influência direta e indireta no processo de ensino e aprendizagem de inúmeros estudantes.

Essa imersão exige que o futuro profissional compreenda seu papel e envolvimento no processo educativo para que possa, intencionalmente, transformar suas práticas e gerar um impacto positivo na formação de cada indivíduo. Conforme postula Libâneo (1990), essa conscientização permite ao estagiário ressignificar, reconstruir e redirecionar sua prática, alinhando-a às reais necessidades da sociedade contemporânea.

A experiência prática contribuiu para desenvolver um olhar mais atento às singularidades da formação humana e uma escuta sensível das vozes sociais que constituem a sala de aula, promovendo a (re)construção da percepção e do entendimento sobre a docência. O estágio é, portanto, o momento em que, segundo Buriolla (1999, p. 13), “a identidade profissional do acadêmico é gerada, construída e referida” no entrecruzamento dos percursos individuais e institucionais. Trata-se de uma ação vivenciada de forma reflexiva e crítica, onde o aprendizado de ser professor transcende a compreensão teórica e se concretiza na complexa realidade da escola.

Nesse sentido, o período de regência revelou a turma como admirável, compreensível e notavelmente reconhecadora do trabalho do professor. Aspectos como a participação ativa e o entusiasmo em aprender um conteúdo, mesmo que familiar, mas apresentado de uma forma metodologicamente diferente, evidenciaram o interesse e o engajamento dos alunos.

Contudo, o maior desafio vivenciado foi a gestão da postura profissional durante as avaliações. É difícil, para o professor em formação, encarar a dificuldade do aluno nesse momento crucial e resistir ao impulso de auxiliar. A necessidade de tangenciar as explicações para não anular o caráter avaliativo da prova, exigindo a separação entre o afeto desenvolvido pela turma e o rigor profissional, foi um aprendizado de grande complexidade emocional.

Em conclusão, os momentos de prática realizados na graduação são inestimáveis. O Estágio Supervisionado não apenas proporciona a imersão no ambiente escolar, mas também possibilita a construção de uma identidade profissional sólida e a reflexão crítica sobre a prática pedagógica. As experiências e desafios enfrentados, especialmente o desenvolvimento do vínculo afetivo com os alunos e a manutenção da ética profissional na avaliação, são pilares para o desenvolvimento do educador, contribuindo para que ele compreenda integralmente a complexidade do processo de ensino-aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, R. **Tecnologias digitais na educação: desafios e possibilidades pedagógicas**. São Paulo: Cortez, 2020.

AUSUBEL, David Paul. **Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva**. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 2003.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988**. Brasília, DF: Presidência da República, 1988.

BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Diário Oficial da União: seção 1, Brasília, DF, 23 dez. 1996.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Programa Nacional de Assistência Estudantil (PNAES)**. Decreto nº 7.234, de 19 de julho de 2010. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 20 jul. 2010.

BURIOLLA, Marta Alice Feiten. **O estágio supervisionado**. São Paulo: Cortez, 1999.

DEWEY, John. **Experiência e educação**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1979.

FILHO, Antônio Nóvoa (org.). **Formação de professores e profissão docente**. Porto: Porto Editora, 2010.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GARDNER, Howard. **Estruturas da mente: a teoria das inteligências múltiplas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1983.

SANTA MARIA. **Plano de Desenvolvimento Institucional (PDI) 2019–2023**. Santa Maria: IFFar, 2019.

SANTA ROSA **Projeto Pedagógico do Curso Técnico em Móveis Integrado ao Ensino Médio (PPC)**. Santa Rosa: IFFar, 2021.

LARA, Isabel Cristina Machado de. **Jogos no ensino da matemática**. Porto Alegre: Mediação, 2004.

LEITE, L. S. **Tecnologias digitais e práticas pedagógicas inovadoras**. São Paulo:

Editora Moderna, 2020.

LIBÂNEO, José Carlos. **Didática**. São Paulo: Cortez, 1990.

LIBÂNEO, José Carlos. **Organização e gestão da escola: teoria e prática**. Goiânia: Alternativa, 1994.

MAFUANI, Fátima Regina. **O estágio supervisionado na formação docente**. São Paulo: Avercamp, 2011.

OLIVEIRA, Maria Rita Neto Sales; CUNHA, Maria Isabel da. **Estágio supervisionado e prática pedagógica**. Campinas: Papirus, 2006.

PELIZZARI, Adriana et al. **Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel**. Curitiba: Editora Base, 2002.

PIAGET, Jean. **A formação do símbolo na criança**. Rio de Janeiro: Zahar, 1956.

PIAGET, Jean. **Psicologia e pedagogia**. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1970.

PONTE, João Pedro da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

VASCONCELLOS, Celso dos Santos. **Avaliação da aprendizagem: práticas de mudança**. São Paulo: Libertad, 2005.

VYGOTSKY, Lev Semionovitch. **A formação social da mente**. 7. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

APÊNDICES

Apêndice I - Planos de Aula

Plano de Aula Semanal nº 1

Acadêmico: Cássio Emanuel Oliveira

Professora Orientadora: Elizangela Weber

Unidade Concedente: Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia Farroupilha - Campus Santa Rosa

Estágio – Turma/Nº de alunos: 2º ano - 30 alunos

Professora Regente da Classe: Julhane Alice Thomas Schulz

Data/Horário: 04/09/2025 – 2 períodos - 13h30 às 15h

1 .Tema/Assunto:

Números e Álgebra - Matrizes

2. Objetos de Conhecimento:

- Representação genérica;
- Igualdade de matrizes;
- Matrizes especiais.

3. Habilidades relativas a BNCC:

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

4 . Objetivos

- Identificar e reconhecer uma matriz como uma organização de dados em linhas e colunas;
- Compreender as características principais de uma matriz, por meio de atividade interativa usando o jogo Sudoku.;
- Aplicar os conceitos de igualdade de matrizes e resolução de sistemas simples para determinar elementos desconhecidos, por meio de exercícios e exemplos práticos;
- Reconhecer e identificar a representação genérica de uma matriz.

5. Metodologia

Investigação Matemática, Método Expositivo e Dialogado e Metodologia de Jogos.

6. Recursos

Materiais de uso comum: lápis, caneta, caderno, folha, tesoura, borracha, etc.

Materiais/recursos didáticos: Sudoku, material impresso,

7. Desenvolvimento

Incentivação:

Apresentação do professor estagiário para a turma e, explicando que será o professor de Matemática por determinado período. Apresentar o cronograma de aulas, com as previsões das atividades a serem desenvolvidas. Explicar alguns combinados para o período de regência:

- Comprometimento pessoal com a construção dos conhecimentos envolvidos nas aulas;
- A avaliação ocorrerá de forma contínua, em todas as aulas;
- O uso dos celulares só será permitido para atividades pedagógicas, ou seja, eventualmente;
- Para verificação da aprendizagem, haverá um trabalho em dupla, com consulta, como revisão para a avaliação. Por fim, haverá uma avaliação individual, sem consulta, abordando todos os conteúdos desenvolvidos.

Após a conversa inicial, realizar a proposta de incentivação da aula, em conjunto a apresentação de cada aluno e, posteriormente, ao conteúdo a ser desenvolvido.

Organizar a turma em 5 grupos, contendo 6 estudantes em cada grupo.

Para a proposta de incentivação, será desenvolvida uma atividade envolvendo o Sudoku, um clássico problema de lógica, que consiste em preencher uma tabela com os números de 1 a 9. Esta tabela é formada por uma grade de blocos 9×9 e dividida em 9 grades menores de blocos 3×3 . As tabelas já trazem alguns números preenchidos, para auxiliar no preenchimento do restante. Para preencher a tabela é preciso seguir algumas regras específicas:

- As linhas devem ser preenchidas com números de 1 a 9, sem haver repetição de números na mesma linha.
- As colunas também devem ser preenchidas sem repetição de números.
- Nas grades 3×3 , também não pode haver repetição de números.

Levando em consideração essas regras, cada grupo receberá uma tabela de Sudoku diferente, com cada integrante do grupo recebendo uma fotocópia da sua respectiva tabela de Sudoku.

Abaixo, segue a fotocópia de uma das tabelas de Sudoku, que também consta no Apêndice 1:

Tabela de Sudoku

5		4		7				2
6			1	9				8
	9				2		6	
8				6				3
	2	6	8		3			1
7	1			2		8		6
9				3		2	8	
		7	4	1				5
	4	5	2				7	9

Com a entrega da tabela, iniciar o conteúdo de matrizes, por meio de questionamentos:

- Qual a lembrança que vocês tem referente as matrizes?

Espera-se que eles relacionem com tabelas, gráficos, ferramenta do excel, entre outros, caso eles não mencionem o professor irá exemplificar.

Desenvolvimento da aula:

Atividade 1: Entregar aos alunos uma fotocópia com questões norteadoras da Investigação Matemática, envolvendo a tabela de Sudoku anteriormente entregue, que consta no Apêndice 2:

MATRIZES

➤ Responda as seguintes questões:

- 1) Complete a tabela de Sudoku.
Gabarito do exemplo.

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8

1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

2) De que maneira pode-se representar os dados da tabela em formato de matriz?

Espera-se que os alunos representem os dados da tabela do Sudoku na forma matricial, isto é, uma matriz de ordem 9.

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 2 & 1 & 9 & 5 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 9 & 8 & 3 & 4 & 2 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 5 & 9 & 7 & 6 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 8 & 5 & 3 & 7 & 9 & 1 \\ 7 & 1 & 3 & 9 & 2 & 4 & 8 & 5 & 6 \\ 9 & 6 & 1 & 5 & 3 & 7 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 8 & 7 & 4 & 1 & 9 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 8 & 6 & 1 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

3) Quantas linhas tem a matriz?

9 linhas.

4) Quantas colunas tem a matriz?

9 colunas.

5) Como podemos expressar a ordem da matriz, relacionando o número de linhas com o número de colunas, considerando o formato $m \times n$ sendo m o número de linhas e n o número de colunas?

Espera-se que os alunos respondam “ 9×9 ”.

6) Qual elemento está presente na 2ª linha e na 4ª coluna?

Resposta esperada: 1.

7) Qual elemento está presente na 8ª linha e na 7ª coluna?

Resposta esperada: 6.

8) Considerando a matriz que representa a tabela de Sudoku, descreva o valor de seus elementos.

$$a_{11} = 5 \quad a_{12} = 3 \quad a_{13} = 4 \quad a_{14} = 6 \quad a_{15} = 7 \quad a_{16} = 8 \quad a_{17} = 9 \quad a_{18} = 1 \quad a_{19} = 2$$

$$\begin{aligned}
a_{21} &= 6 & a_{22} &= 7 & a_{23} &= 2 & a_{24} &= 1 & a_{25} &= 9 & a_{26} &= 5 & a_{27} &= 3 & a_{28} &= 4 & a_{29} &= 8 \\
a_{31} &= 1 & a_{32} &= 9 & a_{33} &= 8 & a_{34} &= 3 & a_{35} &= 4 & a_{36} &= 2 & a_{37} &= 5 & a_{38} &= 6 & a_{39} &= 7 \\
a_{41} &= 8 & a_{42} &= 5 & a_{43} &= 9 & a_{44} &= 7 & a_{45} &= 6 & a_{46} &= 1 & a_{47} &= 4 & a_{48} &= 2 & a_{49} &= 3 \\
a_{51} &= 4 & a_{52} &= 2 & a_{53} &= 6 & a_{54} &= 8 & a_{55} &= 5 & a_{56} &= 3 & a_{57} &= 7 & a_{58} &= 9 & a_{59} &= 1 \\
a_{61} &= 7 & a_{62} &= 1 & a_{63} &= 3 & a_{64} &= 9 & a_{65} &= 2 & a_{66} &= 4 & a_{67} &= 8 & a_{68} &= 5 & a_{69} &= 6 \\
a_{71} &= 9 & a_{72} &= 6 & a_{73} &= 1 & a_{74} &= 5 & a_{75} &= 3 & a_{76} &= 7 & a_{77} &= 2 & a_{78} &= 8 & a_{79} &= 4 \\
a_{81} &= 2 & a_{82} &= 8 & a_{83} &= 7 & a_{84} &= 4 & a_{85} &= 1 & a_{86} &= 9 & a_{87} &= 6 & a_{88} &= 3 & a_{89} &= 5 \\
a_{91} &= 3 & a_{92} &= 4 & a_{93} &= 5 & a_{94} &= 2 & a_{95} &= 8 & a_{96} &= 6 & a_{97} &= 1 & a_{98} &= 7 & a_{99} &= 9
\end{aligned}$$

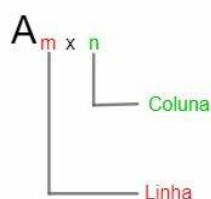
As respostas serão socializadas no decorrer da atividade, conforme a leitura de cada questão, e considerando a especificidade de cada grupo.

Para as atividades 2 e 3, será entregue material impresso como apoio para o desenvolvimento das atividades, presente no Apêndice 3.

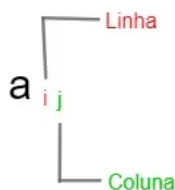
Atividade 2: Entregar material impresso com um resumo sobre o conceito de matrizes, características e representação.

Resumo sobre matrizes

A função das matrizes é relacionar dados numéricos. Matriz é uma tabela organizada em linhas e colunas no formato $m \times n$, onde m representa o número de linhas (horizontal) e n o número de colunas (vertical). A quantidade de linhas e colunas de uma matriz determina sua ordem.



Os dados numéricos de uma matriz são chamados de **elementos**. Cada elemento ocupa uma posição da matriz, definida por linha e por coluna. De forma genérica, cada elemento é do tipo " a_{ij} ", em que "i" representa o número da linha e "j" o número da coluna em que o elemento está inserido.



Os elementos da matriz podem ser organizados entre parênteses, colchetes e duas barras verticais. Seguem abaixo os exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$B = [-51 \quad 13 \quad -7 \quad 3]$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Na sequência, serão desenvolvidos alguns exemplos para melhor compreensão da representação genérica de uma matriz.

➤ Exemplo 1: Venda dos bolos de uma confeitaria no primeiro bimestre do ano.

Produto	Janeiro	Fevereiro
Bolo de chocolate	500	450
Bolo de morango	450	490

1) Represente os dados na forma matricial.

Resposta esperada:

$$A = \begin{bmatrix} 500 & 450 \\ 450 & 490 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 500 & 450 \\ 450 & 490 \end{pmatrix}$$

2) A matriz é composta por quantas linhas? E quantas colunas?

Resposta esperada: 2 linhas e 2 colunas.

3) Qual é a ordem da matriz? ($m \times n$)

Resposta esperada: 2×2

4) Determine a representação genérica da matriz. (a_{ij})

Resposta esperada:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

5) Qual elemento está na 1ª linha e 2ª coluna?

Resposta esperada: 450.

6) Qual elemento está na 2ª linha e 2ª coluna?

Resposta esperada: 490.

➤ Exemplo 2: Determine a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, que possui a seguinte lei de formação $a_{ij} = j^2 - 2i$.

Resposta esperada: Na forma genérica, temos:

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Ao substituir os valores de i e j na expressão, temos:

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Atividade 3: Será estudado o conceito de igualdade de matrizes, com alguns exemplos aplicados para melhor compreensão.

IGUALDADE DE MATRIZES

Vamos considerar duas matrizes, A e B, de mesmo tipo, $m \times n$, no caso 3×2 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

Em matrizes do mesmo tipo, os elementos que ocupam a mesma posição são denominados **elementos correspondentes**.

Então, nas matrizes A e B consideradas, são elementos correspondentes:

$$\begin{array}{ll} a_{11} \text{ e } b_{11} & a_{12} \text{ e } b_{12} \\ a_{21} \text{ e } b_{21} & a_{22} \text{ e } b_{22} \\ a_{31} \text{ e } b_{31} & a_{32} \text{ e } b_{32} \end{array}$$

Definição: Duas matrizes, A e B, são iguais se, e somente se, têm o mesmo tipo e seus elementos correspondentes são iguais.

Simbolicamente, podemos escrever a definição acima assim:

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \text{ com } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n$$

Exemplos:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6:2 & 2-1 \\ 5 \cdot 1 & 4+2 \end{pmatrix}$ as matrizes são quadradas de ordem 2 e os elementos correspondentes são iguais.

b) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, então $A \neq B$, pois A e B não têm o mesmo tipo.

Em seguida, desenvolver no quadro alguns exemplos para melhor compreensão do conceito:

➤ Exemplo 1: Determine os valores de x e y para que as matrizes $A = \begin{pmatrix} 7 & 4x \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 2y & 3 \end{pmatrix}$ sejam iguais.

Resolução:

Considerando que as matrizes possuem a mesma ordem, temos:

$$\begin{cases} 4x = 8 \\ 2y = -2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos os valores de x e y.

$$2y = -2 \Rightarrow y = -1$$

$$4x = 8 \Rightarrow x = 2$$

Portanto, $x = 2$ e $y = -1$.

➤ Exemplo 2: Determine x e y tais que $B = \begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & x-y \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Resolução:

Considerando que as matrizes são iguais, temos:

$$\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases}$$

Utilizando o método da adição, temos:

$$2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

$$x + y = 4 \Rightarrow 3 + y = 4 \Rightarrow y = 1$$

Portanto, $x = 3$ e $y = 1$

Sistematização/Fechamento da Aula:

Encaminhar para que os estudantes realizem em casa uma pesquisa sobre algumas matrizes especiais, anotando em seus cadernos a definição e exemplos de cada uma delas.

Matrizes especiais para pesquisa:

- Matriz linha;
- Matriz coluna;
- Matriz quadrada;
- Matriz diagonal;
- Matriz identidade;
- Matriz nula.

Informar que a pesquisa será socializada com os colegas na próxima aula.

Possível resposta:

- Matriz linha: matriz com uma linha apenas ($1 \times n$).

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

- Matriz coluna: matriz com uma coluna apenas ($m \times 1$).

$$B = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

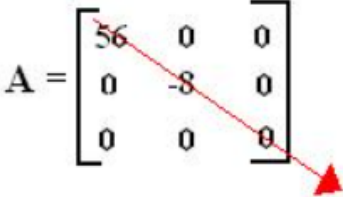
- Matriz quadrada: o número de linhas é igual ao número de colunas ($n \times n$).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Matriz diagonal: é uma matriz quadrada em que todos os elementos que não fazem parte da diagonal principal são iguais a zero.

$$A = \begin{bmatrix} 56 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diagonal principal



- Matriz identidade: É uma matriz quadrada onde todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os outros elementos são iguais a zero. Em geral, esse tipo de matriz é representada pela letra I.

$$I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matriz nula: todos os elementos são iguais a zero.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Avaliação

A avaliação será realizada de forma contínua, considerando o envolvimento dos alunos em todas as etapas da aula. Serão observadas a participação e o engajamento nas discussões iniciais, nas atividades em grupo, como a resolução do Sudoku, valorizando o interesse, a colaboração e o respeito às regras combinadas. Será analisado o desempenho nas atividades práticas, verificando a capacidade de representar corretamente dados em forma matricial, identificar linhas, colunas, ordem e elementos correspondentes, bem como resolver questões envolvendo igualdade de matrizes e sistemas simples. Também serão avaliadas as produções

escritas, como as respostas nas fotocópias das atividades, os registros no caderno, observando a clareza, organização e correção dos conceitos apresentados. Por fim, será acompanhada a atitude e a postura dos alunos, avaliando o cumprimento dos combinados, o uso adequado dos recursos, a colaboração com os colegas e o respeito ao professor e ao ambiente escolar.

9. Bibliografias

ANDRADE, Thaís M. de. **Matemática Interligada: Matrizes, sistemas lineares e Geometria analítica**. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020.

ASTH, Rafael C. **Exercícios de Matrizes (com questões resolvidas e explicadas)**. Toda Matéria. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/matrizes-exercicios/>>. Acesso em: 26 ago. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

DANTE, Luiz R. **Matemática: Contexto & Aplicações - 2º ano: Ensino Médio**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

INFOESCOLA. **Igualdade de matrizes - Matemática**. InfoEscola. Disponível em: <<https://www.infoescola.com/matematica/igualdade-de-matrizes/>>. Acesso em: 26 ago. 2025.

LUIZ, Robson. **Matriz: o que é, tipos, operações, exemplos**. Brasil Escola. Disponível em: <<https://brasilescola.uol.com.br/matematica/matriz.htm>>. Acesso em: 26 ago. 2025.

MARCIANO, Elaine. **Matrizes**. Escola Educação. Disponível em: <<https://escolaeducacao.com.br/matrizes/>>. Acesso em: 26 ago. 2025.

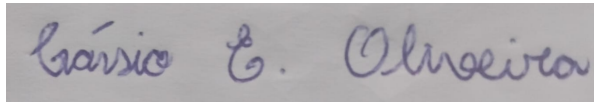
MIRANDA, Danielle de. **Igualdade entre matrizes**. Mundo Educação. Disponível em: <<https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/igualdade-entre-matrizes.htm>>. Acesso em: 26 ago. 2025.

RODRIGUES, Raul. **Exercícios sobre matriz**. Exercícios Mundo Educação. Disponível em: <<https://exercicios.mundoeducacao.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-matriz.htm#resposta-8486>>. Acesso em: 26 ago. 2025.

10. Observações

Na primeira aula, foi possível observar que a turma se mostrou receptiva à apresentação do estagiário e à proposta inicial com o jogo Sudoku. Os alunos participaram de forma colaborativa e demonstraram familiaridade com o jogo, embora poucos tivessem relacionado sua estrutura ao conceito de matrizes. Durante a atividade investigativa, identificaram com facilidade linhas, colunas e elementos,

mostrando boa base inicial. Houve diálogo constante e os estudantes socializaram suas respostas com segurança. A participação foi elevada e o engajamento coletivo favoreceu a introdução significativa do conteúdo. Constatou-se um ambiente de aprendizagem positivo e produtivo.



Cássio Emanuel Oliveira
Aluno – Estagiário



Julhane Thomas Schulz
Supervisor – Parte Concedente



Elizangela Weber
Professor Orientador – Entidade Educacional

Apêndice 1 - Tabelas de Sudoku

Tabela 1

Parcial:

5		4		7				2
6			1	9				8
	9				2		6	
8				6				3
	2	6	8		3			1
7	1			2		8		6
9				3		2	8	
		7	4	1				5
	4	5	2				7	9

Completo:

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

Tabela 2

Parcial:

7			1				5	2
9	1		5	8			6	
		6	7	3		1		
						9	2	5
	5	1				6	4	
2	4	9						
		5		7	3	4		
	6			1	5		8	7
1	9				8			6

Completo:

7	3	4	1	6	9	8	5	2
9	1	2	5	8	4	7	6	3
5	8	6	7	3	2	1	9	4
6	7	8	3	4	1	9	2	5
3	5	1	2	9	7	6	4	8
2	4	9	8	5	6	3	7	1
8	2	5	6	7	3	4	1	9
4	6	3	9	1	5	2	8	7
1	9	7	4	2	8	5	3	6

Tabela 3

Parcial:

8		3		9	1	2		7
					2		4	
	9			4			5	8

4					3	7		
	7	1		5		4	9	
		6	9					3
5	2			8			3	
	1		3					
6		7	4	1		9		2

Completo:

8	4	3	5	9	1	2	6	7
7	6	5	8	3	2	1	4	9
1	9	2	6	4	7	3	5	8
4	8	9	1	6	3	7	2	5
3	7	1	2	5	8	4	9	6
2	5	6	9	7	4	8	1	3
5	2	4	7	8	9	6	3	1
9	1	8	3	2	6	5	7	4
6	3	7	4	1	5	9	8	2

Tabela 4

Parcial:

1				6	3			7
	6		5				3	
		9	1	4		5		
6				3		7	4	
8		3	7		4	6		1
	1	4		5				8

		6		1	2	9		
	2				9		7	
9			4	7				6

Completo:

1	4	5	2	6	3	8	9	7
2	6	7	5	9	8	1	3	4
3	8	9	1	4	7	5	6	2
6	5	2	8	3	1	7	4	9
8	9	3	7	2	4	6	5	1
7	1	4	9	5	6	3	2	8
4	7	6	3	1	2	9	8	5
5	2	1	6	8	9	4	7	3
9	3	8	4	7	5	2	1	6

Tabela 5

Parcial:

2				7				4
	3			2	9	5	7	
	5	8	3			2		
	7		4		6	3		
1	4						6	2
		5	2		1		4	
		7			3	4	2	
	2	4	6	5			8	
3				4				6

Completo:

2	1	9	5	7	8	6	3	4
4	3	6	1	2	9	5	7	8
7	5	8	3	6	4	2	9	1
8	7	2	4	9	6	3	1	5
1	4	3	7	8	5	9	6	2
6	9	5	2	3	1	8	4	7
5	6	7	8	1	3	4	2	9
9	2	4	6	5	7	1	8	3
3	8	1	9	4	2	7	5	6

Apêndice 2 - Questões sobre o Sudoku - Matrizes

MATRIZES

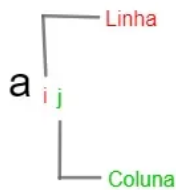
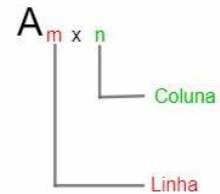
Responda as seguintes questões:

- 1) Complete a tabela de Sudoku.
- 2) De que maneira pode-se representar os dados da tabela em formato de matriz?
- 3) Quantas linhas tem a matriz?
- 4) Quantas colunas tem a matriz?
- 5) Como podemos expressar a ordem da matriz, relacionando o número de linhas com o número de colunas, considerando o formato $m \times n$ sendo m o número de linhas e n o número de colunas?
- 6) Qual elemento está presente na 2ª linha e na 4ª coluna?
- 7) Qual elemento está presente na 8ª linha e na 7ª coluna?
- 8) Considerando a matriz que representa a tabela de Sudoku, descreva o valor de seus elementos.

Apêndice 3 - Material impresso: Resumo de matrizes e igualdade de matrizes

Resumo sobre matrizes

A função das matrizes é relacionar dados numéricos. Matriz é uma tabela organizada em linhas e colunas no formato $m \times n$, onde m representa o número de linhas (horizontal) e n o número de colunas (vertical). A quantidade de linhas e colunas de uma matriz determina sua ordem.



Os dados numéricos de uma matriz são chamados de **elementos**. Cada elemento ocupa uma posição da matriz, definida por linha e por coluna. De forma genérica, cada elemento é do tipo " a_{ij} ", em que "i" representa o número da linha e "j" o número da coluna em que o elemento está inserido.

Os elementos da matriz podem ser organizados entre parênteses, colchetes e duas barras verticais. Seguem os exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$B = [-51 \quad 13 \quad -7 \quad 3]$$

$$C = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ -2 \\ 0 \end{array} \right\|$$

Na sequência, serão desenvolvidos alguns exemplos para melhor compreensão da representação genérica de uma matriz.

➤ Exemplo 1: Venda dos bolos de uma confeitaria no primeiro bimestre do ano.

Produto	Janeiro	Fevereiro
Bolo de chocolate	500	450
Bolo de morango	450	490

- 1) Represente os dados na forma matricial.
- 2) A matriz é composta por quantas linhas? E quantas colunas?
- 3) Qual é a ordem da matriz? ($m \times n$)
- 4) Determine a representação genérica da matriz. (a_{ij})
- 5) Qual elemento está na 1ª linha e 2ª coluna?
- 6) Qual elemento está na 2ª linha e 2ª coluna?

- Exemplo 2: Determine a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, que possui a seguinte lei de formação $a_{ij} = j^2 - 2i$.

IGUALDADE DE MATRIZES

Vamos considerar duas matrizes, A e B, de mesmo tipo, $m \times n$, no caso 3×2 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

Em matrizes do mesmo tipo, os elementos que ocupam a mesma posição são denominados **elementos correspondentes**.

Então, nas matrizes A e B consideradas, são elementos correspondentes:

$$\begin{array}{ll} a_{11} \text{ e } b_{11} & a_{12} \text{ e } b_{12} \\ a_{21} \text{ e } b_{21} & a_{22} \text{ e } b_{22} \\ a_{31} \text{ e } b_{31} & a_{32} \text{ e } b_{32} \end{array}$$

Definição: Duas matrizes, A e B, são iguais se, e somente se, têm o mesmo tipo e seus elementos correspondentes são iguais.

Simbolicamente, podemos escrever a definição acima assim:

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \text{ com } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n$$

Exemplos:

- A. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6:2 & 2-1 \\ 5 \cdot 1 & 4+2 \end{pmatrix}$ as matrizes são quadradas de ordem 2 e os elementos correspondentes são iguais.

- B. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, então $A \neq B$, pois A e B não têm o mesmo tipo.

➤ Exemplo 1: Determine os valores de x e y para que as matrizes $A = \begin{pmatrix} 7 & 4x \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 2y & 3 \end{pmatrix}$ sejam iguais.

➤ Exemplo 2: Determine x e y tais que $B = \begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & x-y \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Plano de Aula Semanal nº 2

Acadêmico: Cássio Emanuel Oliveira

Professora Orientadora: Elizangela Weber

Unidade Concedente: Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia Farroupilha - Campus Santa Rosa

Estágio – Turma/Nº de alunos: 2º ano - 33 alunos

Professora Regente da Classe: Julhane Alice Thomas Schulz

Data/Horário: 10/09/2024 – 1 períodos - 9h10min às 10h

1 .Tema/Assunto:

Números e Álgebra - Matrizes

2. Objetos de Conhecimento:

- Representação genérica;
- Igualdade de matrizes;
- Matrizes especiais.

3. Habilidades relativas a BNCC:

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

4 . Objetivos

- Reconhecer e identificar os diferentes tipos de matrizes especiais, destacando suas características;
- Compreender e assimilar o conteúdo estudado por meio de exercícios contextualizados.

5. Metodologia

Investigação Matemática, Método Expositivo e Dialogado e Metodologia de Jogos.

6. Recursos

Materiais de uso comum: lápis, caneta, caderno, folha, tesoura, borracha, etc.

Materiais/recursos didáticos: Sudoku, material impresso,

7. Desenvolvimento

Incentivação:

No primeiro momento, será feita a devolutiva da pesquisa encaminhada na aula anterior sobre as matrizes especiais:

- Matriz linha;
- Matriz coluna;
- Matriz quadrada;

- Matriz diagonal;
- Matriz identidade;
- Matriz nula.

Os alunos vão socializar o que encontraram sobre as matrizes, destacando o conceito e exemplos de cada uma.

Possível resposta:

- Matriz linha: matriz com uma linha apenas (1 x n).

$$A = [4 \quad 2 \quad -1]$$

- Matriz coluna: matriz com uma coluna apenas (m x 1).

$$B = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

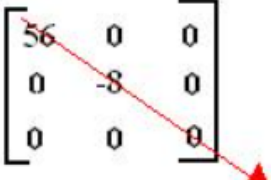
- Matriz quadrada: o número de linhas é igual ao número de colunas (n x n).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Matriz diagonal: é uma matriz quadrada em que todos os elementos que não fazem parte da diagonal principal são iguais a zero.

$$A = \begin{bmatrix} 56 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diagonal principal



- Matriz identidade: É uma matriz quadrada onde todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os outros elementos são iguais a zero. Em geral, esse tipo de matriz é representada pela letra I.

$$I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matriz nula: todos os elementos são iguais a zero.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

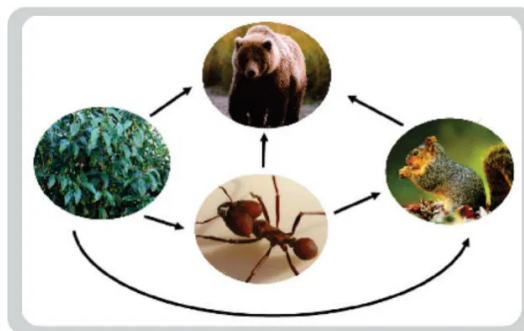
Em conjunto a socialização, o professor vai destacar no quadro cada uma das matrizes especiais.

Desenvolvimento da aula:

Atividade 1: Entregar aos alunos uma fotocópia com atividades, envolvendo os conceitos trabalhados na aula anterior, que consta no Apêndice I:

MATRIZES

1) UFSM - 2011



O diagrama dado representa a cadeia alimentar simplificada de um determinado ecossistema. As setas indicam a espécie de que a outra espécie se alimenta. Atribuindo valor 1 quando uma espécie se alimenta de outra e zero, quando ocorre o contrário, tem-se a seguinte tabela:

	Urso	Esquilo	Inseto	Planta
Urso	0	1	1	1
Esquilo	0	0	1	1
Inseto	0	0	0	1
Planta	0	0	0	0

A matriz $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$, associada à tabela, possui a seguinte lei de formação:

$$a) a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \leq j \\ 1, & \text{se } i > j \end{cases}$$

$$b) a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i = j \\ 1, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$c) a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \geq j \\ 1, & \text{se } i < j \end{cases}$$

$$d) a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$$

$$e) a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i < j \\ 1, & \text{se } i > j \end{cases}$$

Resposta:

Sendo o número da linha indicado por i e o número da coluna indicado por j , e observando a tabela, notamos que quando i é igual a j , ou i é maior que j , o resultado é zero.

Já as posições ocupadas pelo 1 são aquelas em que o número da coluna é maior que o número da linha.

Portanto, a alternativa correta é a c)

2) Sobre as matrizes, julgue as afirmativas a seguir:

I – A matriz linha é aquela que possui uma única linha.

II – A matriz coluna é aquela que possui uma única coluna.

III – A matriz quadrada é aquela que possui número de linhas igual ao número de colunas.

Marque a alternativa correta:

A) Somente I é falsa.

B) Somente II é falsa.

C) Somente III é falsa.

D) Todas são verdadeiras.

3) Uma matriz $A_{5 \times 5}$ possui lei de formação $a_{ij} = 5i - j^2$. A soma dos termos da diagonal principal é igual a:

A) 12

B) 15

C) 18

D) 20

E) 25

Resposta:

$$a_{11} = 5 \cdot 1 - (1)^2 = 4$$

$$a_{22} = 5 \cdot 2 - (2)^2 = 6$$

$$a_{33} = 5 \cdot 3 - (3)^2 = 6$$

$$a_{44} = 5 \cdot 4 - (4)^2 = 4$$

$$S = 4 + 6 + 6 + 4 = 20$$

4) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e a matriz $B = \begin{bmatrix} 4 & 2y+1 \\ 3x-4 & 3 \end{bmatrix}$. Sabendo que as matrizes A e B são iguais, o valor de $x + y$ é igual a:

A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

E) 7

Resposta:

Igualando as matrizes, temos:

$$2y + 1 = 5 \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2$$

$$3x - 4 = 2 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

$$x + y = 2 + 2 = 4$$

Sistematização/Fechamento da Aula:

Ao final da aula, caso dê tempo, realizar a correção dos exercícios.

8. Avaliação

A avaliação será realizada de forma contínua, considerando o envolvimento dos alunos em todas as etapas da aula. A pesquisa e a apresentação dos resultados sobre matrizes especiais serão consideradas, verificando se o grupo compreendeu, registrou e apresentou os conceitos e exemplos adequadamente. Também será avaliado, através dos exercícios, o nível de compreensão dos alunos, buscando verificar quais as dificuldades e se houve algum conceito mal compreendido, simultaneamente podendo ser esclarecido.

9. Bibliografias

ANDRADE, Thaís M. de. **Matemática Interligada: Matrizes, sistemas lineares e Geometria analítica**. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020.

ASTH, Rafael C. **Exercícios de Matrizes (com questões resolvidas e explicadas)**. Toda Matéria. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/matrizes-exercicios/>>. Acesso em: 26 ago. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

DANTE, Luiz R. **Matemática: Contexto & Aplicações - 2º ano: Ensino Médio**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

INFOESCOLA. **Igualdade de matrizes - Matemática**. InfoEscola. Disponível em: <<https://www.infoescola.com/matematica/igualdade-de-matrizes/>>. Acesso em: 26 ago. 2025.

LUIZ, Robson. **Matriz: o que é, tipos, operações, exemplos**. Brasil Escola. Disponível em: <<https://brasilestela.uol.com.br/matematica/matriz.htm>>. Acesso em: 26 ago. 2025.

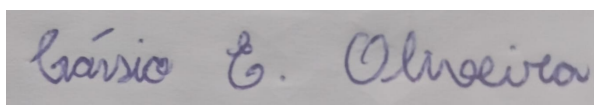
MARCIANO, Elainy. **Matrizes**. Escola Educação. Disponível em: <<https://escolaeducacao.com.br/matrizes/>>. Acesso em: 26 ago. 2025.

MIRANDA, Danielle de. **Igualdade entre matrizes**. Mundo Educação. Disponível em: <<https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/igualdade-entre-matrizes.htm>>. Acesso em: 26 ago. 2025.

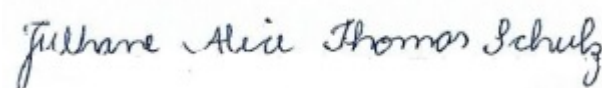
RODRIGUES, Raul. **Exercícios sobre matriz**. Exercícios Mundo Educação. Disponível em: <<https://exercicios.mundoeducacao.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-matriz.htm#resposta-8486>>. Acesso em: 26 ago. 2025.

10. Observações

Nesta aula, os alunos demonstraram boa capacidade de retomada dos conceitos e participaram ativamente da construção dos exemplos de Matrizes Especiais. Alguns apresentaram dúvidas pontuais sobre as características da Matriz Identidade e da Matriz Transposta, mas essas dificuldades foram superadas com explicações dialogadas. A lista de exercícios permitiu identificar domínio crescente do conteúdo e boa capacidade de interpretação. A turma manteve comportamento participativo, sanando dúvidas em conjunto e compartilhando estratégias. O método expositivo dialogado favoreceu a compreensão coletiva e permitiu intervenções pontuais efetivas.



Cássio Emanuel Oliveira
Aluno – Estagiário



Julhane Thomas Schulz
Supervisor – Parte Concedente

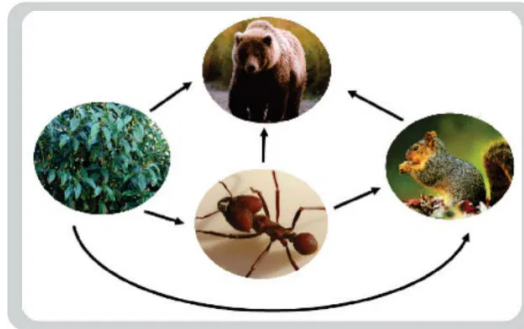


Elizangela Weber
Professor Orientador – Entidade Educacional

Apêndice I - Lista de Exercícios

LISTA DE EXERCÍCIOS

i. UFSM - 2011



O diagrama dado representa a cadeia alimentar simplificada de um determinado ecossistema. As setas indicam a espécie de que a outra espécie se alimenta. Atribuindo valor 1 quando uma espécie se alimenta de outra e zero, quando ocorre o contrário, tem-se a seguinte tabela:

	Urso	Esquilo	Inseto	Planta
Urso	0	1	1	1
Esquilo	0	0	1	1
Inseto	0	0	0	1
Planta	0	0	0	0

A matriz $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$, associada à tabela, possui a seguinte lei de formação:

a) $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \leq j \\ 1, & \text{se } i > j \end{cases}$

b) $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i = j \\ 1, & \text{se } i \neq j \end{cases}$

c) $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \geq j \\ 1, & \text{se } i < j \end{cases}$

d) $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$

e) $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i < j \\ 1, & \text{se } i > j \end{cases}$

ii. Sobre as matrizes, julgue as afirmativas a seguir:

I – A matriz linha é aquela que possui uma única linha.

II – A matriz coluna é aquela que possui uma única coluna.

III – A matriz quadrada é aquela que possui número de linhas igual ao número de colunas.

Marque a alternativa correta:

A) Somente I é falsa.

B) Somente II é falsa.

C) Somente III é falsa.

D) Todas são verdadeiras.

iii. Uma matriz $A_{5 \times 5}$ possui lei de formação $a_{ij} = 5i - j^2$. A soma dos termos da diagonal principal é igual a:

A) 12

B) 15

C) 18

D) 20

E) 25

iv. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e a matriz $B = \begin{bmatrix} 4 & 2y+1 \\ 3x-4 & 3 \end{bmatrix}$. Sabendo que as matrizes A e B são iguais, o valor de $x + y$ é igual a:

A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

E) 7

Plano de Aula Semanal nº 3

Acadêmico: Cássio Emanuel Oliveira

Professora Orientadora: Elizangela Weber

Unidade Concedente: Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia Farroupilha - Campus Santa Rosa

Estágio – Turma/Nº de alunos: 2º ano - 30 alunos

Professora Regente da Classe: Julhane Alice Thomas Schulz

Data/Horário: 11/09/2025 – 2 períodos - 13h30min às 15h10min
17/09/2025 – 2 períodos - 7h30min às 9h10min

1 .Tema/Assunto:

Números e Álgebra - Matrizes

2. Objetos de Conhecimento:

- Operações com matrizes.

3. Habilidades relativas a BNCC:

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

4 . Objetivos

- Realizar operações de adição, subtração e multiplicação de matrizes por escalar, interpretando os procedimentos de forma lógica e estruturada.
- Aplicar conceitos de matriz transposta e matriz oposta na resolução de exercícios e problemas.
- Desenvolver a atividade interativa do “Desafio do Código Secreto das Matrizes”, introduzindo as operações com matrizes.
- Compreender as propriedades de operações com matrizes, reconhecendo padrões e generalizações.

5. Metodologia

Método expositivo e dialogado e Metodologia de jogos

6. Recursos

Materiais de uso comum: Lápis, borracha, folha, caderno, tesoura, etc.

Materiais/recursos didáticos: Livro didático, material impresso.

7. Desenvolvimento

Antes de iniciar o conteúdo, o professor pode perguntar se houve alguma dúvida referente aos exercícios da aula anterior. Caso tenham, realizar uma breve correção de um ou dois exercícios. Após a correção, iniciar o novo conteúdo sobre operações com matrizes.

Incentivação:

Atividade 1: Desafio do Código Secreto das Matrizes

Esta atividade será desenvolvida com o intuito de despertar o interesse dos alunos, contextualizando o uso das matrizes e investigando seus conceitos. Primeiramente, organizar a turma em 7 grupos de 4 integrantes e 1 grupo de 5 integrantes e apresentar a seguinte narrativa, que será impressa junto às matrizes presentes no Apêndice I:

“Uma empresa de tecnologia perdeu o acesso ao seu banco de dados, que está protegido por um código secreto em formato de matriz. Para desbloquear as informações, é necessário realizar uma série de operações matemáticas com as matrizes disponíveis.”

Cada equipe será responsável por decifrar uma parte deste código, aplicando corretamente as operações. Então, devem ser distribuídos conjuntos com duas matrizes por grupo, com diferentes dimensões. Estes conjuntos estão no Apêndice I. Com as matrizes em mãos cada grupo deverá realizar as seguintes operações:

- I: $A + B$;
- II: $A - B$;
- III: $3 * A$;
- IV: $III - II + I$.

Tendo efetuado as operações, cada grupo vai obter uma única matriz. Por fim, os grupos vão se juntar e somar as matrizes que cada um encontrou, obtendo o código secreto.

Como trata-se de uma atividade de incentivação, os alunos não irão saber como realizar as operações. Portanto, durante a atividade, o professor pode demonstrar no quadro essas operações, por exemplo, mostrando duas matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Questionar:

“Se quisermos juntar os dados das matrizes, como faríamos?”

Com esse questionamento, o professor deve escrever no quadro a seguinte expressão “ $A + B$ ” e questionar:

“Se eu somar o elemento da 1ª linha e 1ª coluna, da matriz A com o elemento da mesma posição da matriz B, teremos?”

Resposta esperada: 3.

A partir disso, fazer o mesmo com os demais elementos. Na sequência, repetir o processo com a expressão “A - B”. Assim, espera-se que os alunos concluam que para adicionar e subtrair matrizes, é necessário somar/subtrair os elementos da mesma posição em ambas as matrizes.

Então, escrever no quadro, por exemplo, a expressão “3 * B” e questionar:

“Se eu multiplicar 3 pelo primeiro elemento da matriz B, qual valor obtenho?”

Resposta esperada: 3.

Então, repetir o processo com os demais elementos. Desse modo, os alunos vão chegar à conclusão de que na multiplicação de uma matriz por um escalar, basta multiplicar o escalar (valor fora da matriz) por cada elemento da matriz.

Com base no padrão de desenvolvimento das operações, os alunos podem efetuar o mesmo procedimento com as matrizes que foram distribuídas inicialmente.

Então, supondo que o grupo 1, 2 e 3 recebam as seguintes matrizes:

- Grupo 1:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+1 & 1+5 \\ 3+0 & 4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2-1 & 1-5 \\ 3-0 & 4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$3A = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 13 \\ 9 & 16 \end{bmatrix}$$

- Grupo 2:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+1 & 3+(-1) \\ 1+2 & 4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2-1 & 3-(-1) \\ 1-2 & 4-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$3A = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 22 \end{bmatrix}$$

- Grupo 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+8 & 8+2 \\ 1+1 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-8 & 8-2 \\ 1-1 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3A = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 8 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 16 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$$

Tendo encontrado as matrizes, cada grupo vai converter os valores das matrizes de acordo com a seguinte regra:

1 = A, 2 = B, 3 = C, 4 = D, 5 = E,

Ou seja, cada número vai ser convertido conforme o alfabeto, a primeira letra substituindo o número 1, a segunda o 2, e assim sucessivamente. Substituindo os números por letras, tem-se:

Grupo 1:

$$\begin{bmatrix} 8 & 13 \\ 9 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & M \\ I & P \end{bmatrix}$$

Grupo 2:

$$\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & G \\ G & V \end{bmatrix}$$

Grupo 3:

$$\begin{bmatrix} 19 & 16 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & P \\ E & J \end{bmatrix}$$

Desenvolvimento da aula:

Atividade 2: Entregar uma fotocópia de resumo (Apêndice II) destacando as características e propriedades das operações adição e subtração.

Adição de matrizes

Sejam as matrizes A e B, tal que $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Para obter a matriz $C = A + B$, basta adicionar os elementos correspondentes de A e B:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & 3+1 & 1+2 \\ 0+(-1) & 1+3 & 4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Dadas duas matrizes, A e B, do mesmo tipo, $m \times n$, denomina-se soma da matriz A com a matriz B, que representamos por $A + B$, a matriz C do tipo $m \times n$ na qual cada elemento é obtido adicionando-se os elementos correspondentes de A e B.

Matriz oposta

Chama-se **matriz oposta** da matriz A do tipo $m \times n$ (e indica-se por $-A$) a matriz que adicionada à matriz A resulta na matriz nula de mesmo tipo, isto é, $A + (-A)$, sendo 0 a matriz nula $0_{m \times n}$. Consequentemente, cada elemento da matriz $-A$ é oposto do elemento correspondente da matriz B.

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \text{ então } -A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, \text{ pois:}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+(-1) & -2+2 \\ -3+3 & -5+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades da adição

Dadas as matrizes A, B, C e $0_{m \times n}$ (matriz nula), todas de mesmo tipo, valem as seguintes propriedades:

- comutativa: $A + B = B + A$
- associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- existência do elemento neutro: $A + 0_{m \times n} = 0_{m \times n} + A = A$

- existência do elemento oposto: $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m \times n}$

Exemplo: Considere as matrizes A, B e C. Sabendo que $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ e

$$B + (-C) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ calcule } [A + (-C)] + B.$$

Pelas propriedades associativa e comutativa, temos:

$$[A + (-C)] + B = A + [B + (-C)]$$

Assim:

$$[A + (-C)] + B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Subtração de matrizes

A diferença entre duas matrizes A e B de mesmo tipo é obtida pela soma da matriz A com a oposta de B, isto é, $A - B = A + (-B)$.

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, então a matriz $C = A - B$ é dada por:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -1 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

Atividade 3: Solicitar aos alunos que desenvolvam os seguintes exercícios do material impresso.

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ calcule:}$$

11) Dadas as matrizes

a) $A + B - C$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

b) $A - B + C$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) $A - B - C$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

12) Dadas as seguintes matrizes quadradas de ordem 2:

A com $a_{ij} = \begin{cases} i+2j, & \text{para } i \geq j \\ 0, & \text{para } i < j \end{cases}$ e B com $b_{ij} = \begin{cases} i^3, & \text{para } i \geq j \\ 0, & \text{para } i < j \end{cases}$, calcule $A + B$ e $B + A$.

$$a_{11} = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \quad a_{12} = 0 \quad a_{21} = 2 + 2 \cdot 1 = 4 \quad a_{22} = 2 + 2 \cdot 2 = 6$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$b_{11} = 1^3 = 1 \quad b_{12} = 0 \quad b_{21} = 2^3 = 8 \quad b_{22} = 2^3 = 8$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$$

Realizando as operações, temos:

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 14 \end{bmatrix}$$

$$B + A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 14 \end{bmatrix}$$

14) Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz quadrada de ordem 2 tal que $a_{ij} = 2i + 3j - 5$, descreva no caderno a matriz oposta de A.

$$a_{11} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 5 = 0 \quad a_{12} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 5 = 3$$

$$a_{21} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 5 = 2 \quad a_{22} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 - 5 = 5$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$-A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$$

15) Se $X = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 6 & -10 & 7 \end{bmatrix} + 0$, escreva no caderno X sabendo que 0 é a matriz nula do tipo 2×3 .

$$X = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 6 & -10 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 6 & -10 & 7 \end{bmatrix}$$

Atividade 4: Realizar a leitura dos exemplos e do conceito de multiplicação de matriz por um número real e matriz transposta.

Multiplicação de matriz por um número real

Exemplo: Sendo $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 \\ -4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, então $2A$:

$$2A = 2 \begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 \\ -4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 & 2 \cdot 8 & 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot (-4) & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 16 & -2 \\ -8 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Assim:

Se A é uma matriz $m \times n$, de elementos a_{ij} , e α é um número real, então αA é uma matriz $m \times n$ cujos elementos são αa_{ij} .

Matriz Transposta

Seja A uma matriz $m \times n$. Denomina-se matriz transposta de A (indica-se por A^t) a matriz $n \times m$ cujas linhas são, ordenadamente, as colunas de A .

Exemplos:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 3 & 10 & -1 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 10 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 8 \\ -3 & 2 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Notamos que, se $A = (a_{ij})$ é do tipo $m \times n$, então $A^t = (b_{ji})$ é do tipo $n \times m$ e $b_{ji} = a_{ij}$.

Sistematização/Fechamento da Aula:

Atividade 5: Entregar uma folha impressa (Apêndice III) com exercícios sobre os conteúdos desenvolvidos na aula.

LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Dadas as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcule a expressão $A + B - C$

Resposta:

Primeiro, somamos $A + B$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+(-1) & 1+3 & 4+2 \\ 3+4 & 0+1 & -1+0 \\ 5+2 & 2+(-2) & 3+1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 7 & 1 & -1 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Agora, subtraímos $A + B$ da matriz C .

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 7 & 1 & -1 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3 & 4-1 & 6-2 \\ 7-0 & 1-(-2) & -1-4 \\ 7-(-1) & 0-2 & 4-3 \end{bmatrix}$$

Fechando as operações, temos:

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 7 & 3 & -5 \\ 8 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

2) A matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$ representa os veículos vendidos pela filial A de uma concessionária, sendo o elemento a_{ij} a quantidade de veículos vendidos no mês i do trimestre j de 2020.

De maneira análoga, a matriz $B = (b_{ij})_{3 \times 4}$ representa as vendas de veículos realizados pela filial B, no mesmo período.

$$A = \begin{pmatrix} 27 & 16 & 20 & 21 \\ 19 & 10 & 14 & 17 \\ 21 & 15 & 14 & 28 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 32 & 21 & 20 & 22 \\ 26 & 18 & 17 & 21 \\ 21 & 19 & 16 & 34 \end{pmatrix}$$

a) Em quais meses as filiais venderam a mesma quantidade de veículos?

$a_{13} = 20$, primeiro mês do terceiro trimestre - julho

$a_{31} = 21$, terceiro mês do primeiro trimestre - março

b) Determine a matriz $A + B$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 27 & 16 & 20 & 21 \\ 19 & 10 & 14 & 17 \\ 21 & 15 & 14 & 28 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 32 & 21 & 20 & 22 \\ 26 & 18 & 17 & 21 \\ 21 & 19 & 16 & 34 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 27+32 & 16+21 & 20+20 & 21+22 \\ 19+26 & 10+18 & 14+17 & 17+21 \\ 21+21 & 15+19 & 14+16 & 28+34 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 59 & 37 & 40 & 43 \\ 45 & 28 & 31 & 38 \\ 42 & 34 & 30 & 62 \end{vmatrix}$$

c) Quantos veículos, no total, foram vendidos pelas duas filiais no 3º trimestre de 2020?

$$3 \text{ coluna} = 40 + 31 + 30 = 101$$

3) Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{bmatrix}$. Se $A^t = A$, então x é?

Primeiro vamos, descobrir a transposta de A :

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 2x-1 \\ x^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Igualando as matrizes, temos:

$$x^2 = 2x - 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

Resolvendo a equação quadrática, temos:

$$x = -\frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Portanto, $x = 1$.

8. Avaliação

A avaliação será realizada de forma contínua, considerando o envolvimento dos alunos nas atividades em grupo, a comunicação e a cooperação demonstradas durante o “Desafio do Código Secreto das Matrizes” e o raciocínio lógico aplicado na resolução dos problemas propostos. Além disso, será verificada a capacidade de desenvolver corretamente as operações de adição, subtração, multiplicação de matrizes por escalar, bem como a compreensão e aplicação do conceito de matriz transposta, por meio da correção e discussão dos exercícios realizados em aula e na lista impressa (Apêndice II). Também será observada a habilidade dos alunos de interpretar, generalizar e explicar os procedimentos matemáticos utilizados, valorizando não apenas o resultado final, mas a argumentação e o processo adotado.

9. Bibliografias

ANDRADE, Thaís M. de. **Matemática Interligada: Matrizes, sistemas lineares e Geometria analítica**. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020.

ASTH, Rafael C. **Exercícios de Matrizes (com questões resolvidas e explicadas)**. Toda Matéria. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/matrizes-exercicios/>>. Acesso em: 26 ago. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

DANTE, Luiz R. **Matemática: Contexto & Aplicações - 2º ano: Ensino Médio**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

LEONARDO, Fábio M. de. **Conexões: Matemática e suas tecnologias** - Matrizes e Geometria analítica. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2020.

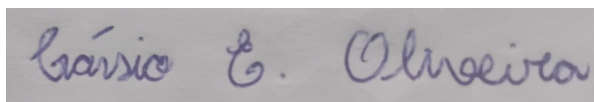
Exercícios de Operações com Matrizes - Lista de Exercícios Resolvida.

Respondeai.com.br. Disponível em:

<<https://www.respondeai.com.br/conteudo/algebra-linear-e-geometria-analitica/matrizes-e-sistemas-lineares/lista-de-exercicios/operacoes-com-matrizes-1020>>. Acesso em: 31 ago. 2025.

10. Observações

Na aula dedicada às operações com matrizes, observou-se elevado engajamento, especialmente durante o desafio do “Código Secreto”. Os alunos demonstraram compreensão satisfatória das regras de adição, subtração e multiplicação por escalar, embora erros de cálculo tenham surgido durante a resolução. O trabalho em grupos favoreceu a troca de estratégias e a socialização dos resultados ampliou a aprendizagem. A postura participativa da turma contribuiu para o bom andamento da aula. Os estudantes demonstraram autonomia crescente na manipulação das operações e grande interesse na atividade lúdica proposta.



Cássio Emanuel Oliveira
Aluno – Estagiário



Julhane Thomas Schulz
Supervisor – Parte Concedente



Elizangela Weber
Professor Orientador – Entidade Educacional

Apêndice I - Matrizes para o Jogo

Conjunto 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Conjunto 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Conjunto 3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Conjunto 4:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Conjunto 5:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Conjunto 6:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Conjunto 7:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Conjunto 8:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Apêndice II - Resumo: Operações com Matrizes

Adição de matrizes

Sejam as matrizes A e B , tal que $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Para obter a matriz $C = A + B$, basta adicionar os elementos correspondentes de A e B :

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & 3+1 & 1+2 \\ 0+(-1) & 1+3 & 4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Dadas duas matrizes, A e B , do mesmo tipo, $m \times n$, denomina-se soma da matriz A com a matriz B , que representamos por $A + B$, a matriz C do tipo $m \times n$ na qual cada elemento é obtido adicionando-se os elementos correspondentes de A e B .

Matriz oposta

Chama-se **matriz oposta** da matriz A do tipo $m \times n$ (e indica-se por $-A$) a matriz que adicionada à matriz A resulta na matriz nula de mesmo tipo, isto é, $A + (-A)$, sendo 0 a matriz nula $0_{m \times n}$. Consequentemente, cada elemento da matriz $-A$ é oposto do elemento correspondente da matriz A .

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, então $-A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, pois:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+(-1) & -2+2 \\ -3+3 & -5+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades da adição

Dadas as matrizes A , B , C e $0_{m \times n}$ (matriz nula), todas de mesmo tipo, valem as seguintes propriedades:

- comutativa: $A + B = B + A$
- associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- existência do elemento neutro: $A + 0_{m \times n} = 0_{m \times n} + A = A$
- existência do elemento oposto: $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m \times n}$

Exemplo: Considere as matrizes A , B e C . Sabendo que $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ e

$$B + (-C) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ calcule } [A + (-C)] + B.$$

Subtração de matrizes

A diferença entre duas matrizes A e B de mesmo tipo é obtida pela soma da matriz A com a oposta de B , isto é, $A - B = A + (-B)$.

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, então a matriz $C = A - B$ é dada por:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -1 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

Para melhor compreensão, responda:

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ calcule:}$$

1) Dadas as matrizes

a) $A + B - C$:

b) $A - B + C$:

c) $A - B - C$:

2) Dadas as seguintes matrizes quadradas de ordem 2:

A com $a_{ij} = \begin{cases} i+2j, & \text{para } i \geq j \\ 0, & \text{para } i < j \end{cases}$ e B com $b_{ij} = \begin{cases} i^3, & \text{para } i \geq j \\ 0, & \text{para } i < j \end{cases}$, calcule $A + B$ e $B + A$.

3) Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz quadrada de ordem 2 tal que $a_{ij} = 2i + 3j - 5$, descreva no caderno a matriz oposta de A.

4) Se $X = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 6 & -10 & 7 \end{bmatrix} + 0$, escreva no caderno X sabendo que 0 é a matriz nula do tipo 2×3 .

Multiplicação de matriz por um número real

Exemplo: Sendo $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 \\ -4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, então $2A$:

$$2A = 2 \begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 \\ -4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 & 2 \cdot 8 & 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot (-4) & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 16 & -2 \\ -8 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Assim:

Se A é uma matriz $m \times n$, de elementos a_{ij} , e α é um número real, então αA é uma matriz $m \times n$ cujos elementos são αa_{ij} .

Matriz Transposta

Seja A uma matriz $m \times n$. Denomina-se matriz transposta de A (indica-se por A^t) a matriz $n \times m$ cujas linhas são, ordenadamente, as colunas de A .

Exemplos:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 3 & 10 & -1 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 10 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 8 \\ -3 & 2 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Notamos que, se $A = (a_{ij})$ é do tipo $m \times n$, então $A^t = (b_{ji})$ é do tipo $n \times m$ e $b_{ji} = a_{ij}$.

Apêndice III - Lista de Exercícios

LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Dadas as seguintes matrizes, calcule a expressão $A + B - C$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- 2) A matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$ representa os veículos vendidos pela filial A de uma concessionária, sendo o elemento a_{ij} a quantidade de veículos vendidos no mês i do trimestre j de 2020. De maneira análoga, a matriz $B = (b_{ij})_{3 \times 4}$ representa as vendas de veículos realizados pela filial B, no mesmo período.

$$A = \begin{pmatrix} 27 & 16 & 20 & 21 \\ 19 & 10 & 14 & 17 \\ 21 & 15 & 14 & 28 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 32 & 21 & 20 & 22 \\ 26 & 18 & 17 & 21 \\ 21 & 19 & 16 & 34 \end{pmatrix}$$

- Em quais meses as filiais venderam a mesma quantidade de veículos?
- Determine a matriz $A + B$.
- Quantos veículos, no total, foram vendidos pelas duas filiais no 3º trimestre de 2020?

- 3) Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{bmatrix}$. Se $A^t = A$, então x é?

Plano de Aula Semanal nº 4

Acadêmico: Cássio Emanuel Oliveira

Professora Orientadora: Elizangela Weber

Unidade Concedente: Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia Farroupilha - Campus Santa Rosa

Estágio – Turma/Nº de alunos: 2º ano - 30 alunos

Professora Regente da Classe: Julhane Alice Thomas Schulz

Data/Horário: 18/09/2025 - 2 períodos - 13h30min às 15h

1 .Tema/Assunto:

Números e Álgebra - Matrizes e Determinantes

2. Objetos de Conhecimento:

- Multiplicação entre matrizes;
- Matriz Inversa;

3. Habilidades relativas a BNCC:

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

4 . Objetivos

- Compreender e calcular a operação de multiplicação entre matrizes, através de problemas aplicados;
- Identificar a matriz inversa por meio da propriedade de igualdade entre a matriz identidade e a soma de uma matriz com a matriz inversa;
- Sistematizar o conteúdo através de problemas contextualizados.

5. Metodologia

Método Expositivo e Dialogado

6. Recursos

Materiais de uso comum: lápis, borracha, caderno, etc

Materiais didáticos: fotocópias

7. Desenvolvimento

Incentivação:

Comunicar aos alunos que será dada sequência no conteúdo, apresentando a operação de multiplicação de matrizes e introduzindo um novo conceito: determinantes. Para tal, será entregue uma fotocópia aos alunos (Apêndice I).

Multiplicação de matriz por matriz

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})$ de ordem $m \times n$ e $B = (b_{ij})$ de ordem $n \times p$, o produto de A por B é a matriz $C = (c_{ij})$ de ordem $m \times p$, em que cada elemento c_{ij} é a soma dos produtos dos elementos da linha i de A pelos elementos da coluna j de B, tomados ordenadamente. Indicamos o produto dessas matrizes por $A \cdot B$ ou AB.

O produto $A \cdot B$ de duas matrizes só é possível se a quantidade de colunas de A for igual à quantidade de linhas de B. Dessa maneira, a matriz C terá a mesma quantidade de linhas de A e a mesma quantidade de colunas de B:

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Desenvolvimento da aula:

Atividade 1: Serão desenvolvidos alguns exemplos para melhor compreensão do conceito.

Exemplo 1: Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}$, determine a matriz C, tal que $C = A \cdot B$.

Resposta esperada: Como a quantidade de colunas de A é igual à quantidade de linhas de B, a multiplicação $A \cdot B$ é possível, e a matriz C, tal que, será do tipo 3×3 .

$$A_{3 \times 2} \cdot B_{2 \times 3} = C_{3 \times 3}$$

Efetando os cálculos, temos:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 5 & 9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 5 & 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 9 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 \\ (-4) \cdot 1 + 0 \cdot 5 & (-4) \cdot (-3) + 0 \cdot 9 & (-4) \cdot 1 + 0 \cdot 4 \\ 6 \cdot 1 + 1 \cdot 5 & 6 \cdot (-3) + 1 \cdot 9 & 6 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -15 & -2 \\ -4 & 12 & -4 \\ 11 & -9 & 10 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2: Vamos calcular a multiplicação de A e B.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Resposta: Sabemos que, em $A_{2 \times 2}$ e $B_{2 \times 3}$, o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B, então o produto existe. Assim, faremos $C = A \cdot B$ e sabemos que $C_{2 \times 3}$.

Multiplicando, temos que:

$$C = \begin{bmatrix} 3 \cdot 6 + 2 \cdot 0 & 3 \cdot 4 + 2 \cdot 7 & 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \\ 5 \cdot 6 + (-1) \cdot 0 & 5 \cdot 4 + (-1) \cdot 7 & 5 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 18 + 0 & 12 + 14 & -6 + 2 \\ 30 + 0 & 20 - 7 & -10 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 26 & 4 \\ 30 & 13 & -11 \end{bmatrix}$$

Propriedades das matrizes

1ª propriedade: associativa

Dadas as matrizes $A_{m \times n}$, $B_{n \times p}$ e $C_{p \times r}$, temos $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

2ª propriedade: distributiva à esquerda

Dadas as matrizes $A_{m \times n}$, $B_{n \times p}$ e $C_{n \times p}$, temos $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

3ª propriedade: distributiva à direita

Dadas as matrizes $A_{m \times n}$, $B_{m \times n}$ e $C_{n \times p}$, temos $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

4ª propriedade: elemento neutro

Dada a matriz $A_{m \times n}$ e as matrizes identidade I_m e I_n , temos $I_m \cdot A = A$ e $A \cdot I_n = A$.

5ª propriedade

Dadas as matrizes $A_{m \times n}$ e $B_{n \times p}$ e k um número real, temos

$$(k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B) = k \cdot (A \cdot B).$$

6ª propriedade

Dadas as matrizes $A_{m \times n}$ e $B_{n \times p}$, temos $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

A **propriedade comutativa** não vale para a multiplicação de matrizes.

Ao multiplicarmos duas matrizes quadradas A e B, podemos ter duas situações:

$A \cdot B = B \cdot A$ ou $A \cdot B \neq B \cdot A$. Se ocorrer a 1ª situação, dizemos que as matrizes A e B comutam.

Atividade 2: Apresentar o conceito de matriz inversa.

Matriz Inversa

Seja uma matriz quadrada A de ordem n. Quando existe uma matriz B, também de ordem n, tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, B é chamada **matriz inversa** de A, a qual indicamos por A^{-1} . Se existir a matriz inversa de uma matriz dada,

dizemos que esta é **invertível** ou **não singular**. Nesse caso, dizemos que a matriz A é invertível e, é possível demonstrar, que sua inversa A^{-1} é única. Se não existir a inversa de uma matriz dada, dizemos que esta é **não invertível** ou **singular**.

Exemplo: Vamos determinar a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, caso exista.

Se existir, a matriz inversa de A será do tipo $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Pela definição, $A \cdot B = I_2$ e $B \cdot A = I_2$. Dessa maneira, podemos escrever a igualdade:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= I_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} a+3c & b+3d \\ a+2c & b+2d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A partir da igualdade de matrizes, podemos escrever os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} a+3c=1 \\ a+2c=0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} b+3d=0 \\ b+2d=1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas, obtemos $a = -2$, $c = 1$, $b = 3$ e $d = -1$. Assim:

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ para a qual } A \cdot B = I_2.$$

Agora, vamos verificar se a matriz B obtida também é válida para $B \cdot A = I_2$.

$$\begin{aligned} B \cdot A &= \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & -2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto, B é a matriz inversa de A , ou seja, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Atividade 3: Desenvolver alguns exercícios para melhor compreensão dos conceitos de multiplicação de matrizes e matriz inversa.

LISTA DE EXERCÍCIOS

- 1) (PUC-RS) Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = A \cdot B$, o elemento C_{33} da matriz C é:

- a) 9
- b) 0
- c) -4
- d) -8**
- e) -12

Resposta: Como $A_{3 \times 3}$ e $B_{3 \times 3}$ é possível haver multiplicação, pois o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.

A matriz C genérica será:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & \mathbf{c_{33}} \end{bmatrix}$$

c_{33} é o resultado da multiplicação matricial entre a terceira linha de A com a terceira coluna de B.

$$c_{33} = -1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 = -1 - 3 - 4 = -8$$

Assim, $c_{33} = -8$

2) Determine os valores de x e y para que a igualdade $\begin{bmatrix} 3 & y \\ x & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \end{bmatrix}$ seja verdadeira.

Resposta:

Multiplicando as matrizes, temos as seguintes equações:

$$3 \cdot 4 + y \cdot (-2) = -2 \quad \text{e} \quad x \cdot 4 + 6 \cdot (-2) = 8$$

Resolvendo as equações, temos:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 4 + y \cdot (-2) &= -2 \Rightarrow 12 - 2y = -2 \Rightarrow -2y = -14 \Rightarrow y = 7 \\ x \cdot 4 + 6 \cdot (-2) &= 8 \Rightarrow 4x - 12 = 8 \Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow x = 5 \end{aligned}$$

Portanto, $x = 5$ e $y = 7$.

3) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, determine $A + (A^t)^{-1}$.

Resposta: Primeiramente, determinamos a matriz transposta A^t :

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Na sequência, vamos determinar a matriz inversa da transposta $(A^t)^{-1}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2a+3c & 2b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando as matrizes, temos os seguintes sistemas de equações:

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ 2a + 3c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b + d = 0 \\ 2b + 3d = 1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas, temos:

$$\begin{cases} a + c = 1 (\times -2) \\ 2a + 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow c = -2$$

$$a + (-2) = 1 \Rightarrow a = 3$$

$$\begin{cases} b + d = 0 (\times -2) \\ 2b + 3d = 1 \end{cases} \Rightarrow d = 1$$

$$b + 1 = 0 \Rightarrow b = -1$$

Portanto, a matriz inversa $(A^t)^{-1}$ é:

$$(A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Agora, resolvendo a equação $A + (A^t)^{-1}$, temos:

$$A + (A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

4) Se $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & p \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ é a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} q & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, qual o valor de $p \cdot q$?

Resposta: Primeiramente, utilizamos da definição $A \cdot A^{-1} = I_2$:

$$\begin{pmatrix} q & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & p \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} q \cdot 2 + (-2) \cdot 2 & q \cdot p + (-2) \cdot 5 \\ -1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 & -1 \cdot p + 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando o elemento a_{12} da matriz inversa e o elemento i_{12} da matriz identidade, temos:

$$p \cdot q - 10 = 0 \Rightarrow p \cdot q = 10$$

8. Avaliação

A avaliação será contínua, acompanhando o desenvolvimento das atividades propostas em sala de aula. Será observada a participação dos alunos nas discussões, a realização das atividades mediante aplicação correta dos procedimentos de cálculo, a capacidade de interpretar e resolver problemas contextualizados envolvendo multiplicação de matrizes e matriz inversa, além, é claro, da clareza na apresentação das resoluções. Como instrumento formal, serão utilizadas as listas de exercícios para verificar o nível de compreensão e sistematizar o conteúdo desenvolvido.

9. Bibliografias

ANDRADE, Thaís M. de. **Matemática Interligada: Matrizes, sistemas lineares e Geometria analítica**. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020.

ASTH, Rafael C. **Determinantes: como calcular até ordem 3**. Toda Matéria. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/determinantes/>>. Acesso em: 18 set. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

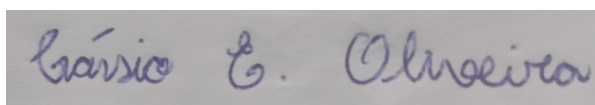
DANTE, Luiz R. **Matemática: Contexto & Aplicações** - 2º ano: Ensino Médio. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

LEONARDO, Fábio M. de. **Conexões: Matemática e suas tecnologias** - Matrizes e Geometria analítica. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2020.

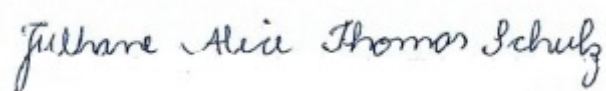
RODRIGUES, Raul. Exercícios sobre determinantes. Exercícios Mundo Educação. Disponível em: <<https://exercicios.mundoeducacao.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-determinantes.htm#resposta-8356>>. Acesso em: 18 set. 2025.

10. Observações

Durante a abordagem sobre multiplicação de matrizes e matriz inversa, os alunos exibiram maior necessidade de acompanhamento, devido à complexidade dos cálculos. Houve várias solicitações de repetição dos passos algébricos, indicando atenção e esforço em compreender o processo. A socialização coletiva auxiliou na identificação e correção imediata de erros. O ambiente de diálogo favoreceu a participação da turma e permitiu intervir no ritmo de aprendizagem. A compreensão geral evoluiu ao longo da aula e os estudantes demonstraram empenho significativo para dominar o conteúdo.



Cássio Emanuel Oliveira
Aluno – Estagiário



Julhane Thomas Schulz
Supervisor – Parte Concedente



Elizangela Weber
Professor Orientador – Entidade Educacional

Apêndice 1 - Resumo: Multiplicação de Matrizes e Determinantes

Multiplicação de matriz por matriz

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})$ de ordem $m \times n$ e $B = (b_{ij})$ de ordem $n \times p$, o produto de A por B é a matriz $C = (c_{ij})$ de ordem $m \times p$, em que cada elemento c_{ij} é a soma dos produtos dos elementos da linha i de A pelos elementos da coluna j de B, tomados ordenadamente. Indicamos o produto dessas matrizes por $A \cdot B$ ou AB .

O produto $A \cdot B$ de duas matrizes só é possível se a quantidade de colunas de A for igual à quantidade de linhas de B. Dessa maneira, a matriz C terá a mesma quantidade de linhas de A e a mesma quantidade de colunas de B:

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1: Dadas as matrizes A e B , determine a matriz C , tal que $C = A \cdot B$.

Exemplo 2: Vamos calcular a multiplicação de A e B.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Propriedades das matrizes

1ª propriedade: associativa

Dadas as matrizes $A_{m \times n}$, $B_{n \times p}$ e $C_{p \times r}$, temos $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

2ª propriedade: distributiva à esquerda

Dadas as matrizes $A_{m \times n}$, $B_{n \times p}$ e $C_{n \times p}$, temos $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

3ª propriedade: distributiva à direita

Dadas as matrizes $A_{m \times n}$, $B_{m \times n}$ e $C_{n \times p}$, temos $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

4ª propriedade: elemento neutro

Dada a matriz $A_{m \times n}$ e as matrizes identidade I_m e I_n , temos $I_m \cdot A = A$ e $A \cdot I_n = A$.

5ª propriedade

Dadas as matrizes $A_{m \times n}$ e $B_{n \times p}$ e k um número real, temos

$$(k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B) = k \cdot (A \cdot B).$$

6ª propriedade

Dadas as matrizes $A_{m \times n}$ e $B_{n \times p}$, temos $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

A **propriedade comutativa** não vale para a multiplicação de matrizes.

Ao multiplicarmos duas matrizes quadradas A e B , podemos ter duas situações:

$A \cdot B = B \cdot A$ ou $A \cdot B \neq B \cdot A$. Se ocorrer a 1ª situação, dizemos que as matrizes A e B comutam.

Matriz Inversa

Seja uma matriz quadrada A de ordem n . Quando existe uma matriz B , também de ordem n , tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, B é chamada **matriz inversa** de

A , a qual indicamos por A^{-1} . Se existir a matriz inversa de uma matriz dada, dizemos que esta é **invertível** ou **não singular**. Nesse caso, dizemos que a matriz A é invertível e, é possível demonstrar, que sua inversa A^{-1} é única. Se não existir a inversa de uma matriz dada, dizemos que esta é **não invertível** ou **singular**.

Exemplo: Vamos determinar a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, caso exista.

Se existir, a matriz inversa de A será do tipo $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Pela definição, $A \cdot B = I_2$ e $B \cdot A = I_2$. Dessa maneira, podemos escrever a igualdade:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= I_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} a+3c & b+3d \\ a+2c & b+2d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A partir da igualdade de matrizes, podemos escrever os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} a+3c=1 \\ a+2c=0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} b+3d=0 \\ b+2d=1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas, obtemos $a = -2$, $c = 1$, $b = 3$ e $d = -1$. Assim:

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ para a qual } A \cdot B = I_2.$$

Agora, vamos verificar se a matriz B obtida também é válida para $B \cdot A = I_2$.

$$\begin{aligned}
 B \cdot A &= \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & -2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Portanto, B é a matriz inversa de A, ou seja, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Determinante de uma matriz

O determinante é um número associado a uma matriz quadrada. Esse número é encontrado fazendo-se determinadas operações com os elementos que compõe a matriz.

Indicamos o determinante de uma matriz A por $\det A$. Podemos ainda, representar o determinante por duas barras entre os elementos da matriz.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & 9 & 5 \\ 9 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

Determinante de uma matriz de ordem 1

O determinante de uma matriz de ordem 1, ou seja, $A = (a_{11})$, é o próprio elemento a_{11} . Indicamos esse determinante por $\det A = a_{11}$.

Exemplos:

- $B = (7)$, então $\det B = 7$
- $C = \left(\frac{-1}{5}\right)$, então $\det C = \frac{-1}{5}$

Determinante de uma matriz de ordem 2

O determinante da matriz quadrada $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ é igual à diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

De maneira prática, mantemos o sinal do produto da diagonal principal e invertemos o do produto da diagonal secundária.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

trocar o sinal do produto
manter o sinal do produto

Exemplo:

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, vamos obter $\det A$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 9 \cdot (-1) - 2 \cdot 5 = -9 - 10 = -19$$

Apêndice 2 - Exercícios: Multiplicação de matrizes

LISTA DE EXERCÍCIOS

1 - (PUC-RS) Sendo $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, o elemento C_{33} da matriz C é:

- (a) 9
- (b) 0
- (c) -4
- (d) -8
- (e) -12

2 - Determine os valores de x e y para que a igualdade $\begin{bmatrix} 3 & y \\ x & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \end{bmatrix}$ seja verdadeira.

3 - Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, determine $A + (A^t)^{-1}$.

4 - Se $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & p \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ é a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} q & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, qual o valor de $p \cdot q$?

Apêndice 3 - Exercícios: Determinantes

LISTA DE EXERCÍCIOS

1 - Na matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, o valor do determinante é:

- A) 3
- B) 4
- C) 5
- D) 6
- E) 7

2 - Qual deve ser o maior valor de x que faz com que o determinante da matriz M seja igual a -4?

$$M = \begin{bmatrix} x + 1 & 12 \\ 5 & x \end{bmatrix}$$

- A) 7
- B) 8
- C) 9
- D) 10
- E) 11

3 - Analise as matrizes a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Sabendo que existe uma matriz B de mesma ordem que a matriz A , tal que $\det(A + B) = 7$, então podemos afirmar que $\det B$ é igual a:

- A) 4
- B) 5

C) 6

D) 7

E) 9

4 - (Fundatec) O valor real de x na matriz de ordem 2×2 , para que $\det \begin{pmatrix} x & -3 \\ 12 & x \end{pmatrix} = 45$, é:

A) -3 e 3

B) 9 e -9

C) 40,5

D) 4,5

E) 30

Plano de Aula Semanal nº 5

Acadêmico: Cássio Emanuel Oliveira

Professora Orientadora: Elizangela Weber

Unidade Concedente: Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia Farroupilha - Campus Santa Rosa

Estágio – Turma/Nº de alunos: 2º ano - 30 alunos

Professora Regente da Classe: Julhane Alice Thomas Schulz

Data/Horário: 24/09/2025 – 1 períodos - 9h10min às 10h
25/09/2025 – 2 períodos - 13h30min às 15h

1 .Tema/Assunto:

Números e Álgebra - Matrizes e Determinantes

2. Objetos de Conhecimento:

- Determinantes de matrizes: ordem 1, ordem 2 e ordem 3.

3. Habilidades relativas a BNCC:

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

4 . Objetivos

- Reconhecer e aplicar os procedimentos de cálculo de determinantes de matrizes.
- Sistematizar o conteúdo através de problemas contextualizados.

5. Metodologia

Método Expositivo e Dialogado

6. Recursos

Materiais de uso comum: lápis, borracha, caderno, etc

Materiais didáticos: fotocópias

7. Desenvolvimento

Incentivação:

Num primeiro momento, será realizada a correção dos exercícios encaminhados na última aula. Os exercícios serão socializados pelos alunos, junto a correção no quadro branco. Após a correção, será dada sequência no conteúdo de determinantes.

Desenvolvimento da aula:

Atividade 1: Nessa atividade será introduzido o conceito de determinantes de matrizes, e entregue aos alunos um breve resumo (Apêndice 1).

Determinante de uma matriz

O determinante é um número associado a uma matriz quadrada. Esse número é encontrado fazendo-se determinadas operações com os elementos que compõe a matriz.

Indicamos o determinante de uma matriz A por $\det A$. Podemos ainda, representar o determinante por duas barras entre os elementos da matriz.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & 9 & 5 \\ 9 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

Determinante de uma matriz de ordem 1

O determinante de uma matriz de ordem 1, ou seja, $A = (a_{11})$, é o próprio elemento a_{11} . Indicamos esse determinante por $\det A = a_{11}$.

Exemplos:

- $B = (7)$, então $\det B = 7$
- $C = \left(\frac{-1}{5}\right)$, então $\det C = \frac{-1}{5}$

Determinante de uma matriz de ordem 2

O determinante da matriz quadrada $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ é igual à diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

De maneira prática, mantemos o sinal do produto da diagonal principal e invertemos o do produto da diagonal secundária.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

trocar o sinal do produto
manter o sinal do produto

Exemplo:

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, vamos obter $\det A$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 9 \cdot (-1) - 2 \cdot 5 = -9 - 10 = -19$$

Atividade 2: Entregar aos alunos um material impresso com o conceito de Determinantes de matrizes de ordem 3, demonstrando o uso da Regra de Sarrus (Apêndice 2).

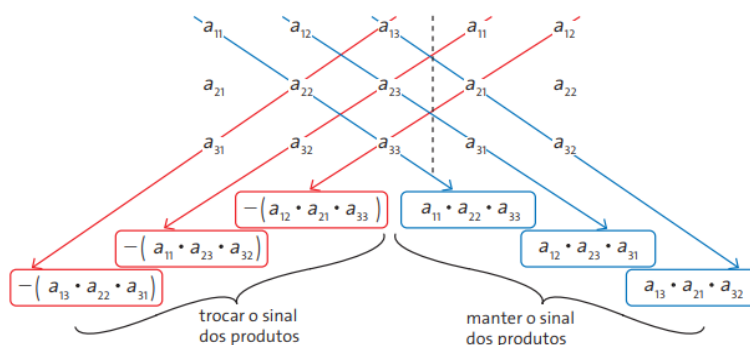
Determinante de uma matriz de ordem 3

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, podemos obter o $\det A$ por meio do seguinte cálculo:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Para obter os produtos acima, utilizamos uma regra prática, conhecida como regra de Sarrus. De acordo com essa regra:

- repetimos a 1ª e a 2ª colunas à direita da matriz. Em seguida, efetuamos as multiplicações conforme as indicações das setas no esquema:

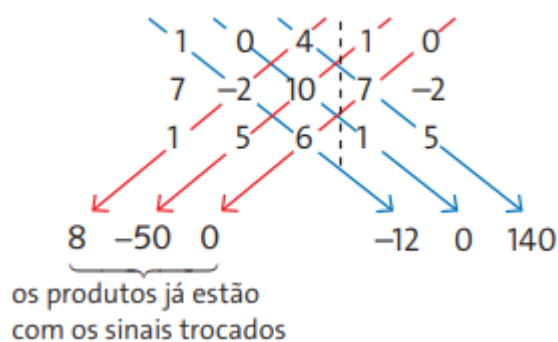


- o sinal do produto dos elementos indicados pelas setas azuis é mantido e o dos indicados pelas setas vermelhas é trocado.

- o determinante é a soma dos resultados obtidos.

Exemplo:

Utilizando a regra de Sarrus, vamos obter o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 7 & -2 & 10 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.



$$\det A = -12 + 0 + 140 + 8 - 50 + 0 = 86$$

Exemplo: Determine a solução da equação: $\begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ -3 & 6 & 1 \\ 9 & x & -5 \end{vmatrix} = 14$

Utilizando a regra de Sarrus:

$$-30x + 18 + 3x + 54 - x^2 - 30 = 14 \Rightarrow -x^2 - 27x + 28 = 0$$

Resolvendo a equação de 2º grau, utilizando a fórmula de Bhaskara, temos:

$$a = -1, b = -27, c = 28$$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-27)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 28 = 729 + 112 = 841$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{27 \pm \sqrt{841}}{-2} = \frac{27 \pm 29}{-2}$$

$$x_1 = \frac{27+29}{-2} = -28, x_2 = \frac{27-29}{-2} = 1$$

Portanto, $x = -28$ ou $x = 1$.

Propriedades dos determinantes

As propriedades dos determinantes, em geral, são utilizadas para facilitar o cálculo dos determinantes. Lembrando que elas são válidas para qualquer matriz quadrada. Abaixo, estão algumas delas descritas e exemplificadas.

1ª propriedade

Dada uma matriz quadrada A de ordem n , o seu determinante é igual ao determinante de sua transposta, isto é, $\det A = \det A^t$.

Exemplo:

Sejam $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ e sua transposta $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\det A = 0 + 0 + 24 - 20 + 4 - 0 = 8$$

$$\det A^t = 0 + 24 + 0 - 20 + 4 - 0 = 8$$

Portanto, $\det A = \det A^t$.

2ª propriedade

Dada uma matriz quadrada A de ordem n , se todos os elementos de uma linha ou coluna forem iguais a zero, $\det A = 0$.

Exemplos:

1. Se $A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & -5 & 4 \end{pmatrix}$, então $\det A = 0$.

2. Se $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 11 & 0 \end{pmatrix}$, então $\det B = 0$.

3ª propriedade

Dada uma matriz quadrada A de ordem $n \geq 2$, se trocarmos a posição de duas de suas linhas (ou de suas colunas), o determinante da nova matriz será o oposto do determinante de A .

Exemplo:

Se $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \\ -6 & 8 & 6 \end{pmatrix}$, então $\det A = 0 - 48 + 56 - 12 + 0 + 160 = -164$.

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & 8 & -6 \end{pmatrix}$$

Trocando de posição a 1ª e a 3ª colunas de A , obtemos

$$\det B = 0 + 12 + 160 + 48 - 0 - 56 = 164.$$

Portanto, $\det B = -\det A$.

4ª propriedade

Dada uma matriz quadrada A de ordem $n \geq 2$, se os elementos correspondentes de duas linhas (ou duas colunas) forem iguais, $\det A = 0$.

Exemplos:

1. Se $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \end{pmatrix}$, então $\det A = -42 + 12 + 63 - 12 + 42 - 63 = 0$.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 7 & 16 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Se

$$\det B = -20 + 56 - 32 + 20 - 56 + 32 = 0.$$

5ª propriedade

Dada uma matriz quadrada A de ordem n , se multiplicarmos todos os elementos de uma linha (ou de uma coluna) por um número real k , seu determinante ficará multiplicado por k .

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Se

$$\det A = 35 - 6 + 168 - 98 - 60 + 6 = 45.$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Multiplicando a 1ª linha da matriz por 2, obtemos a matriz

$$\det B = 70 - 12 + 336 - 196 - 120 + 12 = 90 \Rightarrow 90 = 2 \cdot 45.$$

Portanto, $\det B = 2 \cdot \det A$.

6ª propriedade

Dada uma matriz quadrada A de ordem $n \geq 2$, se cada elemento de certa linha (ou coluna) for igual ao produto entre o elemento correspondente de outra linha (ou coluna) e um número real k não nulo, então, $\det A = 0$.

Exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

1. Se

$$\det A = 24 - 24 = 0.$$

Nesse caso, a 2ª coluna é o quádruplo da 1ª.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & 11 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Se

$$\det A = 0 - 132 - 30 + 30 - 0 + 132 = 0.$$

Nesse caso, a 3ª linha é o dobro da 1ª.

7ª propriedade

Dada uma matriz triangular A , seu determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 9 & -10 \end{pmatrix}$$

Se , então

$$\det A = -240 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = -240 \Rightarrow 6 \cdot 4 \cdot (-10).$$

8ª propriedade: teorema de Jacobi

Seja uma matriz quadrada A de ordem $n \geq 2$. Se multiplicarmos todos os elementos de uma linha (ou de uma coluna) dessa matriz por um número real e adicionarmos os resultados obtidos aos elementos correspondentes de outra linha (ou coluna), obteremos a matriz B, tal que $\det A = \det B$.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -3 & 4 & 0 \\ 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Se , $\det A = 56 + 0 - 135 + 63 - 120 - 0 = -136$

Multiplicando a 1ª coluna de A por (-2) e adicionando o resultado obtido à 3ª

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 6 \\ 6 & 9 & -5 \end{pmatrix}$$

coluna, obtemos a matriz . Calculando $\det B$, temos:

$$\det B = -40 + 108 - 27 - 45 - 24 - 108 = -136$$

Portanto, $\det A = \det B$.

9ª propriedade: teorema de Binet

Sejam as matrizes quadradas A e B de mesma ordem. O determinante do produto dessas matrizes é igual ao produto dos determinantes de cada uma delas, isto é, $\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$.

Exemplo:

$$\text{Sejam } A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 59 \\ 1 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\det(A \cdot B) = -136 - 59 = -195$$

$$\det A = -3 - 12 = -15 \text{ e } \det B = 18 - 5 = 13$$

$$(\det A) \cdot (\det B) = -15 \cdot 13 = -195$$

Portanto, $\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$.

Sistematização/Fechamento da Aula:

Atividade 3: Nessa atividade será realizada uma lista de exercícios sobre determinantes de matrizes (Apêndice 2).

LISTA DE EXERCÍCIOS

1 - Na matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, o valor do determinante é:

- A) 3
- B) 4
- C) 5
- D) 6
- E) 7**

Resposta:

Calculando o determinante, temos:

$$\det A = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = 7$$

Portanto, $\det A = 7$

2 - Qual deve ser o maior valor de x que faz com que o determinante da matriz M seja igual a -4 ?

$$M = \begin{bmatrix} x+1 & 12 \\ 5 & x \end{bmatrix}$$

- A) 7**
- B) 8
- C) 9
- D) 10
- E) 11

Resposta:

Calculando o determinante, temos:

$$\det M = (x+1)x - 12 \cdot 5 \Rightarrow \det M = x^2 + x - 60$$

Sabemos que $\det M = -4$.

$$x^2 + x - 60 = -4 \Rightarrow x^2 + x - 56 = 0$$

Utilizando a fórmula de Bhaskara, temos:

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-56) = 1 + 224 = 225$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{225}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 15}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1+15}{2} = 7$$

$$x_2 = \frac{-1-15}{2} = -8$$

Como a questão pede o maior valor, então $x = 7$.

3 - Analise a matriz $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Sabendo que existe uma matriz B de mesma ordem que a matriz A , tal que $\det(A+B) = 7$, então podemos afirmar que $\det B$ é igual a:

- A) 4
B) 5
 C) 6
 D) 7
 E) 9

Resposta:

Calculando $\det A$, temos:

$$\det A = 6 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 2$$

Como $\det (A+B) = 7$, temos:

$$\det (A + B) = \det A + \det B \Rightarrow 7 = 2 + \det B \Rightarrow \det B = 7 - 2 = 5$$

Portanto, $\det B = 5$

4 - (Fundatec) O valor real de x na matriz de ordem 2×2 , para que $\det \begin{pmatrix} x & -3 \\ 12 & x \end{pmatrix} = 45$, é:

- A) -3 e 3**
 B) 9 e -9
 C) 40,5
 D) 4,5
 E) 30

Resposta:

$$\det M = x \cdot x - (-3) \cdot 12 = x^2 + 36$$

$$x^2 + 36 = 45 \Rightarrow x^2 = 9$$

$$x = \sqrt{9}$$

$$x = \pm 3$$

Portanto, x assume os valores de -3 e 3.

5 - (UERJ) Observe a matriz:

$$\begin{bmatrix} 3+t & -4 \\ 3 & t-4 \end{bmatrix}$$

Para que o determinante dessa matriz seja nulo, o maior valor real de t deve ser igual a:

- A) 1**
 B) 2
 C) 3
 D) 4

Resposta:

$$(3 + t) \cdot (t - 4) - (-4) \cdot (3) = 0 \Rightarrow t^2 - t - 12 + 12 = 0 \Rightarrow t^2 - t = 0$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow t = \frac{1 \pm 1}{2}$$

$$t_1 = \frac{1+1}{2} = 1, t_2 = \frac{1-1}{2} = 0$$

Como a questão pede o maior valor real, então $t = 1$.

6 - (PM ES – AOCP). Para saber o custo total (em reais) na produção de x uniformes para um grupo de soldados, primeiramente substitui-se cada elemento x , da matriz a seguir, pela quantidade de uniformes que se quer produzir e calcula-se o determinante dessa matriz, obtendo-se, assim, o custo total na produção destes x uniformes igual ao valor do determinante.

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 100 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Dessa forma, para se produzir 70 uniformes para um grupo de soldados, o custo total nessa produção será de

A) R\$ 4.100,00.

B) R\$ 3.500,00.

C) R\$ 3.100,00.

D) R\$ 2.500,00.

E) R\$ 2.100,00.

Resposta:

Calculando o determinante:

$$\det = x \cdot (-x) \cdot 1 + 1 \cdot 100 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot (-1)$$

$$- 0 \cdot (-x) \cdot 0 - x \cdot 100 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 \cdot 1 = -x^2 + 100x$$

Substituindo x por 70, temos:

$$-x^2 + 100x = -(70)^2 + 100 \cdot 70 = -4900 + 7000 = 2100$$

Portanto, para produzir 70 uniformes, serão gastos R\$ 2100,00.

7 - (UP). Considerando a matriz abaixo, qual é o valor de k ?

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & k & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 10$$

A) 1

B) 2

C) -1

D) 0

Resposta:

$$\det = 1 \cdot k \cdot 2 + 5 \cdot 3 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) \cdot 0 - (-2) \cdot k \cdot 0 - 1 \cdot 3 \cdot 0 - 5 \cdot (-1) \cdot 2 = 2k + 10 = 10 \Rightarrow 2k = 0 \Rightarrow k = 0$$

Portanto, $k = 0$.

8 - (UNITAU-SP) Sendo $B = (b_{ij})_{2 \times 2}$, em que:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ -2ij, & \text{se } i < j \\ 3j, & \text{se } i > j \end{cases}$$

Calculando o $\det B$, obtemos:

A) 13

B) -25

C) 25

D) 20

E) -10

Resposta:

Construindo a matriz genérica, temos:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Utilizando a lei de formação, temos:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, b_{11} = b_{22} = 1, b_{12} = -2 \cdot 1 \cdot 2 = -4, b_{21} = 3 \cdot 1 = 3$$

Então, calculando o $\det B$, temos:

$$\det B = 1 \cdot 1 - (-4) \cdot 3 = 13$$

Portanto, $\det B = 13$.

9 - (FGV-SP) O determinante de $(A^t \cdot B)$, sendo A^t = matriz transposta de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ é}$$

A) -65

B) 55

C) 202

- D) -120
E) N.d.a.

Resposta:

Primeiramente, encontramos a matriz transposta de A:

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora, fazemos a multiplicação da matriz transposta de A com B:

$$A^t \cdot B = \begin{bmatrix} 2*1+1*2+(-3)*3 & 2*1+1*(-2)+(-3)*4 \\ 3*1+1*2+0*3 & 3*1+1*(-2)+0*4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -12 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Por fim, calculamos o determinante de $A^t \cdot B$:

$$\det(A^t \cdot B) = -5 * 1 - (-12) * 5 = 55$$

Portanto, $\det(A^t \cdot B) = 55$.

10 - (Mackenzie-SP) Em R, a solução da equação

$$\begin{bmatrix} 2 & x & x \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 6 \text{ é:}$$

- A) 4
B) 5
C) 6
D) 3
E) 2

Resposta:

$$\det R = -8 - 3x - x + 6x + 2 + 2x = 4x - 6$$

$$4x - 6 = 6 \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3$$

Portanto, $x = 3$.

11 - (CEFET-MG-2010) Se a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & c \\ 1 & c & 3 \end{bmatrix}$ é não inversível, então c pertence ao conjunto:

- A) $\{-9, -3\}$
B) $\{-3, 5\}$
C) $\{-2, 4\}$
D) $\{0, 9\}$

E) $\{1, 3\}$

Resposta:

Como a matriz é não inversível (não possui inversa), significa que seu determinante é igual a 0, assim, temos:

$$\det B = 27 + c + c - 9 - c^2 - 3 = -c^2 + 2c + 15$$

$$-c^2 + 2c + 15 = 0$$

Utilizando a Bhaskara, temos:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 15 = 64$$

$$c = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{-2} = \frac{-2 \pm 8}{-2}$$

$$c_1 = \frac{-2+8}{-2} = -3, c_2 = \frac{-2-8}{-2} = 5$$

Portanto, o conjunto solução é $c = \{-3, 5\}$.

12 - (UNESP) Sejam A e B matrizes quadradas de ordem 3. Se:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e B é tal que } B^{-1} = 2A, \text{ o determinante de B será:}$$

A) 24

B) 6

C) 3

D) $\frac{1}{6}$

E) $\frac{1}{24}$

Resposta:

Calculando $2A$, temos:

$$2A = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Como $B^{-1} = 2A$, podemos encontrar o determinante de B^{-1} :

$$\det B^{-1} = 2 \times (-2) \times 4 + 4 \times 2 \times 2 + 6 \times 0 \times 0 - 6 \times (-2) \times 2 - 2 \times 2 \times 0 - 4 \times 0 \times 4 = 24$$

Agora podemos aplicar a propriedade da matriz inversa. Temos:

$$\det B^{-1} = \frac{1}{\det B} \Rightarrow \det B = \frac{1}{\det B^{-1}} \Rightarrow \det B = \frac{1}{24}$$

13 - (PM AC – Funcab). Considerando a matriz quadrada A abaixo, e $\det(A)$ seu determinante, calcule o valor de $5 \cdot \det(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -13 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

- A) 10
- B) -140
- C) 270**
- D) 130
- E) -35

Resposta:

Calculando o determinante, temos:

$$\det A = 28 - 26 = 2$$

Agora, calculando $5 \cdot \det(A)$, temos:

$$5 \cdot \det A = 5 \cdot 2 = 10$$

Portanto, $5 \cdot \det(A) = 10$.

14 - Dada a matriz A, podemos afirmar que o seu determinante é igual a:

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{8} & \sqrt{27} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

- A) -5**
- B) -4
- C) -3
- D) -2
- E) -1

Resposta:

Calculando o determinante, temos:

$$\det A = \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{27} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{16} - \sqrt{81} = 4 - 9 = -5$$

Portanto, $\det A = -5$.

8. Avaliação

A avaliação será contínua, acompanhando o desenvolvimento das atividades propostas em sala de aula. Será observada a participação dos alunos nas discussões, a realização das atividades mediante aplicação correta dos procedimentos de cálculo, a capacidade de interpretar e resolver problemas contextualizados envolvendo determinantes de uma matriz de diferente ordem (1x1,

2x2 e 3x3), além, é claro, da clareza na apresentação das resoluções. Como instrumento formal, serão utilizadas as listas de exercícios para verificar o nível de compreensão e sistematizar o conteúdo desenvolvido.

9. Bibliografias

ANDRADE, Thaís M. de. **Matemática Interligada: Matrizes, sistemas lineares e Geometria analítica**. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020.

ASTH, Rafael C. **Determinantes: como calcular até ordem 3**. Toda Matéria. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/determinantes/>>. Acesso em: 18 set. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

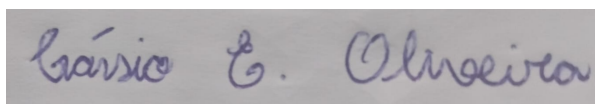
DANTE, Luiz R. **Matemática: Contexto & Aplicações** - 2º ano: Ensino Médio. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

LEONARDO, Fábio M. de. **Conexões: Matemática e suas tecnologias** - Matrizes e Geometria analítica. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2020.

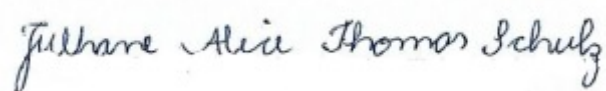
RODRIGUES, Raul. Exercícios sobre determinantes. Exercícios Mundo Educação. Disponível em: <<https://exercicios.mundoeducacao.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-determinantes.htm#resposta-8356>>. Acesso em: 18 set. 2025.

10. Observações

A aula de determinantes revelou bom desempenho na compreensão das matrizes de ordem 1 e 2. A aplicação da Regra de Sarrus, inicialmente, causou dúvidas sobre o direcionamento das diagonais e sinais, mas a explicação passo a passo permitiu superar as dificuldades. A troca entre os alunos durante a resolução dos exercícios foi positiva e contribuiu para a construção conjunta do conhecimento. O estagiário fez intervenções adequadas e promoveu segurança na execução dos cálculos. A turma demonstrou atenção e avanços consideráveis ao final da aula.



Cássio Emanuel Oliveira
Aluno – Estagiário



Julhane Thomas Schulz
Supervisor – Parte Concedente



Elizangela Weber
Professor Orientador – Entidade Educacional

Apêndice 1 - Resumo: Determinantes

Determinante de uma matriz

O determinante é um número associado a uma matriz quadrada. Esse número é encontrado fazendo-se determinadas operações com os elementos que compõe a matriz.

Indicamos o determinante de uma matriz A por $\det A$. Podemos ainda, representar o determinante por duas barras entre os elementos da matriz.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & 9 & 5 \\ 9 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

Determinante de uma matriz de ordem 1

O determinante de uma matriz de ordem 1, ou seja, $A = (a_{11})$, é o próprio elemento a_{11} . Indicamos esse determinante por $\det A = a_{11}$.

Exemplos:

- $B = (7)$, então $\det B = 7$
- $C = \left(\frac{-1}{5}\right)$, então $\det C = \frac{-1}{5}$

Determinante de uma matriz de ordem 2

O determinante da matriz quadrada $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ é igual à diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

De maneira prática, mantemos o sinal do produto da diagonal principal e invertemos o do produto da diagonal secundária.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

trocar o sinal do produto
manter o sinal do produto

Exemplo:

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, vamos obter $\det A$.

Determinante de uma matriz de ordem 3

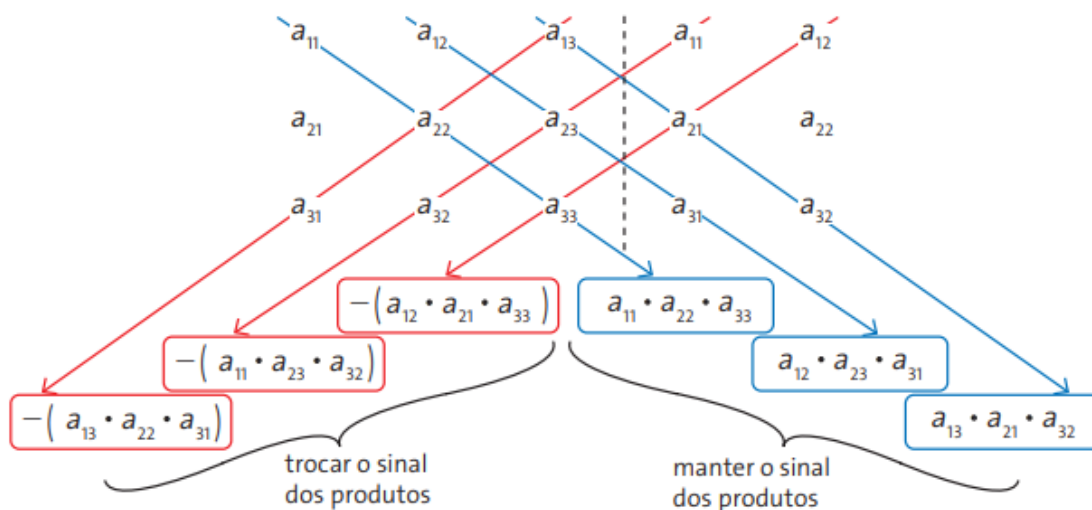
Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, podemos obter o $\det A$ por meio do seguinte

cálculo:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Para obter os produtos acima, utilizamos uma regra prática, conhecida como regra de Sarrus. De acordo com essa regra:

- repetimos a 1ª e a 2ª colunas à direita da matriz. Em seguida, efetuamos as multiplicações conforme as indicações das setas no esquema:



- o sinal do produto dos elementos indicados pelas setas azuis é mantido e o dos indicados pelas setas vermelhas é trocado.
- o determinante é a soma dos resultados obtidos.

Exemplo:

Utilizando a regra de Sarrus, vamos obter o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 7 & -2 & 10 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ -3 & 6 & 1 \\ 9 & x & -5 \end{vmatrix} = 14$$

Exemplo: Determine a solução da equação

Propriedades dos determinantes

As propriedades dos determinantes, em geral, são utilizadas para facilitar o cálculo dos determinantes. Lembrando que elas são válidas para qualquer matriz quadrada. Abaixo, estão algumas delas descritas e exemplificadas.

1ª propriedade

Dada uma matriz quadrada A de ordem n , o seu determinante é igual ao determinante de sua transposta, isto é, $\det A = \det A^t$.

Exemplo:

$$\text{Sejam } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ e sua transposta } A^t = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = 0 + 0 + 24 - 20 + 4 - 0 = 8$$

$$\det A^t = 0 + 24 + 0 - 20 + 4 - 0 = 8$$

Portanto, $\det A = \det A^t$.

2ª propriedade

Dada uma matriz quadrada A de ordem n , se todos os elementos de uma linha ou coluna forem iguais a zero, $\det A = 0$.

Exemplos:

$$3. \text{ Se } A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & -5 & 4 \end{pmatrix}, \text{ então } \det A = 0.$$

$$4. \text{ Se } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 11 & 0 \end{pmatrix}, \text{ então } \det B = 0.$$

3ª propriedade

Dada uma matriz quadrada A de ordem $n \geq 2$, se trocarmos a posição de duas de suas linhas (ou de suas colunas), o determinante da nova matriz será o oposto do determinante de A .

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \\ -6 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Se

$$\det A = 0 - 48 + 56 - 12 + 0 + 160 = -164.$$

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & 8 & -6 \end{pmatrix}$$

Trocando de posição a 1ª e a 3ª colunas de A , obtemos

$$\det B = 0 + 12 + 160 + 48 - 0 - 56 = 164.$$

Portanto, $\det B = -\det A$.

4ª propriedade

Dada uma matriz quadrada A de ordem $n \geq 2$, se os elementos correspondentes de duas linhas (ou duas colunas) forem iguais, $\det A = 0$.

Exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Se

$$\det A = -42 + 12 + 63 - 12 + 42 - 63 = 0.$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 7 & 16 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Se

$$\det B = -20 + 56 - 32 + 20 - 56 + 32 = 0.$$

5ª propriedade

Dada uma matriz quadrada A de ordem n , se multiplicarmos todos os elementos de uma linha (ou de uma coluna) por um número real k , seu determinante ficará multiplicado por k .

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Se

$$\det A = 35 - 6 + 168 - 98 - 60 + 6 = 45.$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Multiplicando a 1ª linha da matriz por 2, obtemos a matriz

$$\det B = 70 - 12 + 336 - 196 - 120 + 12 = 90 \Rightarrow 90 = 2 * 45.$$

Portanto, $\det B = 2 \cdot \det A$.

6ª propriedade

Dada uma matriz quadrada A de ordem $n \geq 2$, se cada elemento de certa linha (ou coluna) for igual ao produto entre o elemento correspondente de outra linha (ou coluna) e um número real k não nulo, então, $\det A = 0$.

Exemplos:

$$3. \text{ Se } A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}, \text{ então } \det A = 24 - 24 = 0.$$

Nesse caso, a 2ª coluna é o quádruplo da 1ª.

$$4. \text{ Se } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & 11 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}, \text{ então}$$

$$\det A = 0 - 132 - 30 + 30 - 0 + 132 = 0.$$

Nesse caso, a 3ª linha é o dobro da 1ª.

7ª propriedade

Dada uma matriz triangular A , seu determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 9 & -10 \end{pmatrix}$$

Se

$$\det A = -240 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = -240 \Rightarrow 6 \cdot 4 \cdot (-10).$$

8ª propriedade: teorema de Jacobi

Seja uma matriz quadrada A de ordem $\geq$. Se multiplicarmos todos os elementos de uma linha (ou de uma coluna) dessa matriz por um número real e adicionarmos os resultados obtidos aos elementos correspondentes de outra linha (ou coluna), obteremos a matriz B , tal que $\det A = \det B$.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -3 & 4 & 0 \\ 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Se

$$\det A = 56 + 0 - 135 + 63 - 120 - 0 = -136$$

Multiplicando a 1ª coluna de A por (-2) e adicionando o resultado obtido à 3ª

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 6 \\ 6 & 9 & -5 \end{pmatrix}$$

coluna, obtemos a matriz

$$\det B = -40 + 108 - 27 - 45 - 24 - 108 = -136$$

Portanto, $\det A = \det B$.

9ª propriedade: teorema de Binet

Sejam as matrizes quadradas A e B de mesma ordem. O determinante do produto dessas matrizes é igual ao produto dos determinantes de cada uma delas, isto é, $\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$.

Exemplo:

Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 59 \\ 1 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\det(A \cdot B) = -136 - 59 = -195$$

$$\det A = -3 - 12 = -15 \text{ e } \det B = 18 - 5 = 13$$

$$(\det A) \cdot (\det B) = -15 \cdot 13 = -195$$

Portanto, $\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$.

Apêndice 2 - Exercícios: Determinantes

LISTA DE EXERCÍCIOS

1 - Na matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, o valor do determinante é:

- A) 3
- B) 4
- C) 5
- D) 6
- E) 7

2 - Qual deve ser o maior valor de x que faz com que o determinante da matriz M seja igual a -4?

$$M = \begin{bmatrix} x + 1 & 12 \\ 5 & x \end{bmatrix}$$

- A) 7
- B) 8
- C) 9
- D) 10
- E) 11

3 - Analise as matrizes a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Sabendo que existe uma matriz B de mesma ordem que a matriz A , tal que $\det(A + B) = 7$, então podemos afirmar que $\det B$ é igual a:

- A) 4
- B) 5
- C) 6
- D) 7
- E) 9

4 - (Fundatec) O valor real de x na matriz de ordem 2×2 , para que

$$\det \begin{pmatrix} x & -3 \\ 12 & x \end{pmatrix} = 45, \text{ é:}$$

- A) -3 e 3
- B) 9 e -9
- C) 40,5
- D) 4,5
- E) 30

5 - (UERJ) Observe a matriz:

$$\begin{bmatrix} 3+t & -4 \\ 3 & t-4 \end{bmatrix}$$

Para que o determinante dessa matriz seja nulo, o maior valor real de t deve ser igual a:

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4

6 - (PM ES – AOCP). Para saber o custo total (em reais) na produção de x uniformes para um grupo de soldados, primeiramente substitui-se cada elemento x , da matriz a seguir, pela quantidade de uniformes que se quer produzir e calcula-se o determinante dessa matriz, obtendo-se, assim, o custo total na produção destes x uniformes igual ao valor do determinante.

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 100 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Dessa forma, para se produzir 70 uniformes para um grupo de soldados, o custo total nessa produção será de

- A) R\$ 4.100,00.
- B) R\$ 3.500,00.
- C) R\$ 3.100,00.
- D) R\$ 2.500,00.
- E) R\$ 2.100,00.

7 - (UP). Considerando a matriz abaixo, qual é o valor de k ?

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & k & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 10$$

- A) 1
- B) 2
- C) -1
- D) 0

8 - (UNITAU-SP) Sendo $B = (b_{ij})_{2 \times 2}$, em que:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ -2ij, & \text{se } i < j \\ 3j, & \text{se } i > j \end{cases}$$

Calculando o $\det B$, obtemos:

- A) 13
- B) -25
- C) 25
- D) 20
- E) -10

9 - (FGV-SP) O determinante de $(A^t \cdot B)$, sendo A^t = matriz transposta de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ é}$$

- A) -65
- B) 55
- C) 202
- D) -120
- E) N.d.a.

10 - (Mackenzie-SP) Em $\mathbb{R}$, a solução da equação

$$\begin{bmatrix} 2 & x & x \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 6 \text{ é:}$$

- A) 4
- B) 5
- C) 6
- D) 3
- E) 2

11 - (CEFET-MG-2010) Se a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & c \\ 1 & c & 3 \end{bmatrix}$ é não inversível, então c pertence ao conjunto:

- A) $\{-9, -3\}$
- B) $\{-3, 5\}$
- C) $\{-2, 4\}$

D) $\{0, 9\}$ E) $\{1, 3\}$

12 - (UNESP) Sejam A e B matrizes quadradas de ordem 3. Se:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e B é tal que $B^{-1} = 2A$, o determinante de B será:

A) 24

B) 6

C) 3

D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{24}$

13 - (PM AC – Funcab). Considerando a matriz quadrada A abaixo, e $\det(A)$ seu determinante, calcule o valor de $5 \cdot \det(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -13 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

A) 10

B) -140

C) 270

D) 130

E) -35

14 - Dada a matriz A, podemos afirmar que o seu determinante é igual a:

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{8} & \sqrt{27} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

A) -5

B) -4

C) -3

D) -2

E) -1

Plano de Aula Semanal nº 6

Acadêmico: Cássio Emanuel Oliveira

Professor(a) Orientador(a): Elizângela Weber

Unidade Concedente: Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia Farroupilha

Estágio – Turma/Nº de alunos: 2º ano - 33 alunos

Professor(a) Regente da Classe: Julhane Thomas Schulz

Data/Horário: 01/10/2024 – 3 períodos - Das 7h 30min as 10h

1. Tema/Assunto:

Números e Álgebra - Sistemas lineares

2. Objetos de Conhecimento:

- Equações lineares;
- Sistemas lineares;
- Classificação de um sistema linear 2×2 (SPD, SPI ou SI);

3. Habilidades relativas a BNCC:

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

4. Objetivos

- Compreender o conceito de sistema linear 2×2 e sua relação com equações lineares.
- Resolver sistemas lineares 2×2 por diferentes métodos algébricos (substituição e adição).
- Representar graficamente sistemas lineares 2×2 no plano cartesiano, identificando o ponto de interseção ou a ausência dele.
- Classificar sistemas lineares em SPD, SPI e SI, a partir da análise algébrica e gráfica.
- Utilizar o software GeoGebra como ferramenta para investigar e visualizar soluções de sistemas lineares.
- Desenvolver o raciocínio lógico e a capacidade de interpretar situações-problema do cotidiano que podem ser modeladas por sistemas lineares.

5. Metodologia

Método Expositivo e Dialogado.

6. Recursos

Materiais de uso comum: lápis, caderno, borracha, folha, etc.

Materiais/recursos didáticos: material impresso

Materiais/recursos tecnológicos: Computador, Internet, Geogebra.

7. Desenvolvimento

Incentivação:

Nessa aula, será desenvolvido o conteúdo de sistemas lineares, com foco na ordem 2×2 , através de uma atividade prática envolvendo o uso do software Geogebra. Num primeiro momento, em sala de aula, o professor vai desenvolver na lousa uma revisão conceitual sobre equações do primeiro grau, começando com um questionamento:

“O que vocês lembram sobre equações do 1º grau?”

(Resposta esperada: Sentenças matemáticas que estabelecem relações de igualdade entre 2 termos, possuindo uma ou mais incógnitas com grau 1. Tem objetivo de encontrar o valor da incógnita que satisfaz a equação.)

Com o questionamento, o professor descreve no quadro algumas equações do 1º grau na lousa, com o intuito de que os alunos tentem encontrar as soluções delas:

Exemplo: Um estacionamento cobra R\$ 2,00 por hora de permanência. João pagou R\$ 6,00 ao retirar o carro. Quantas horas João deixou o carro estacionado?

Solução:

Primeiramente, vamos definir a equação que representa o problema, determinando x como o tempo em que o carro ficou estacionado, assim temos:

$$2x - 6 = 0 \text{ ou } 2x = 6$$

- Isolamos a incógnita x :

$$2x - 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6$$

- Encontramos o valor de x :

$$x = \frac{6}{2} \Rightarrow x = 3$$

Portanto, o carro ficou estacionado 3 horas.

Podemos observar que esta equação, por ter apenas uma incógnita, tem apenas uma única solução que, neste caso, foi $x = 3$.

Exemplo: Uma fábrica produz dois tipos de cadeiras: de metal e de madeira.

- Cada cadeira de metal precisa de 2 horas de trabalho na oficina.

- Cada cadeira de madeira precisa de 1 hora de trabalho.
O setor de produção tem disponível 10 horas de trabalho no total. Sabendo disso, quantas cadeiras de cada material são produzidas diariamente?

Solução:

Vamos montar a equação. Adotando x como o número de cadeiras de metal e y o número de cadeiras de madeira, temos:

$$2x + y = 10$$

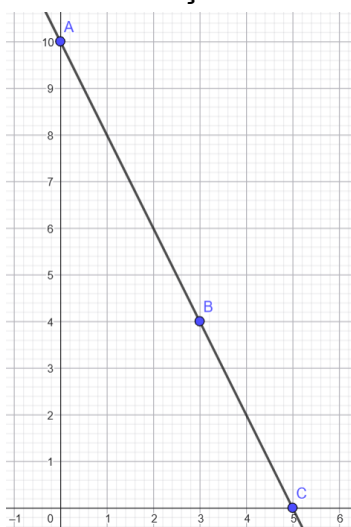
- Podemos isolar o y :

$$2x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - 2x$$

Neste caso, encontramos a lei de formação, ou seja, para cada valor de x , há um valor de y correspondente. Ao resolver algebricamente, os alunos podem encontrar algumas soluções para a equação:

- Se $x = 0$, então $y = 10 - 2(0) \Rightarrow y = 10$. Uma solução é o par ordenado $(0, 10)$.
- Se $x = 3$, então $y = 10 - 2(3) \Rightarrow y = 4$. Uma solução é o par ordenado $(3, 4)$.
- Se $x = 5$, então $y = 10 - 2(5) \Rightarrow y = 0$. Uma solução é o par ordenado $(5, 0)$.

Geometricamente, a equação pode ser representada por uma reta no plano cartesiano através da lei de formação obtida anteriormente:



Vemos que, a depender do dia, o número de cadeiras de cada tipo pode variar, isto é, não podemos definir uma única quantidade de cadeiras a serem produzidas nesse mesmo intervalo de tempo.

Percebe-se que, a equação possui infinitas soluções uma vez que podem ser encontrados infinitos valores para x e y . Neste momento, o professor vai expressar que estas equações também podem ser chamadas de equações lineares.

As equações lineares possuem uma ou mais incógnitas. Em uma equação linear com duas incógnitas, ela pode ser escrita no formato $ax + by = c$, onde a e b são números reais e coeficientes das incógnitas e c é um número real chamado termo independente.

No caso da segunda equação $2x + y = 10$, temos que os coeficientes de x e y são respectivamente 2 e 1, e 10 sendo o termo independente. A partir dessa relação, o professor pode introduzir os sistemas lineares.

Desenvolvimento da aula:

Atividade 1: Entregar um material impresso (Apêndice 1) para introduzir o conceito de sistemas lineares e recordar os métodos de resolução de sistemas lineares.

Sistemas lineares

Denominamos sistema linear $m \times n$ um conjunto S de m equações lineares com n incógnitas, sendo m e n números naturais e maiores do que zero.

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

em que:

- $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são as incógnitas;
- $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}$ são os coeficientes das incógnitas;
- $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m$ são os termos independentes.

Exemplos:

- $\begin{cases} x - y = 12 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$ Sistema linear 2 x 2, ou seja, com duas equações lineares e duas incógnitas (x e y).

- $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 2z = 15 \\ x + 4y - z = -7 \end{cases}$ Sistema linear 3 x 3, ou seja, com três equações lineares e três incógnitas (x, y e z).

Com essa introdução, o professor vai destacar que nessa aula serão trabalhadas apenas as equações lineares 2 x 2. Assim sendo, partimos para a solução de um sistema linear 2 x 2, com o seguinte exemplo prático:

Exemplo: Em uma lanchonete, a conta de João (3 pastéis e 2 sucos) foi R\$ 31,00, e a de Maria (2 pastéis e 1 suco) foi R\$ 18,00. Qual o preço de cada item?”

Resposta:

Primeiramente, destacamos a forma algébrica de um sistema linear 2 x 2:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

A partir do enunciado, podemos definir as incógnitas, os coeficientes e os termos independentes. Podemos dizer que o preço dos pastéis é representado por x e o preços dos sucos por y. Assim, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 31 \\ 2x + y = 18 \end{cases}$$

Para determinar a solução, podemos utilizar o método da adição ou da substituição. Pelo método da adição, temos:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 31 \\ 2x + y = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 31 \\ -4x - 2y = -36 \end{cases} \Rightarrow -x = -5 \Rightarrow x = 5$$

Tendo encontrado o valor de x, podemos substituí-lo em uma das equações:

$$2x + y = 18 \Rightarrow 2(5) + y = 18 \Rightarrow y = 18 - 10 \Rightarrow y = 8$$

Realizando a prova real, temos:

$$(I) 3x + 2y = 31 \Rightarrow 3(5) + 2(8) = 31 \Rightarrow 15 + 16 = 31 \Rightarrow 31 = 31$$

$$(II) 2x + y = 18 \Rightarrow 2(5) + 8 = 18 \Rightarrow 10 + 8 = 18 \Rightarrow 18 = 18$$

Portanto, os valores que satisfazem ambas as equações são $x = 5$ e $y = 8$. Isto é, o preço do pastel é R\$ 5,00 e o preço do suco é R\$ 8,00.

Atividade 2: Desenvolver o estudo da classificação dos sistemas lineares 2 x 2, a partir de alguns exemplos.

No início da aula, o professor já havia demonstrado que as equações lineares com duas incógnitas podem ser representadas por uma reta no plano cartesiano. Sendo assim, nesta atividade os alunos irão desenvolver a parte algébrica e a geométrica (gráfica) dos sistemas lineares.

Classificação de um sistema linear 2 x 2

Um sistema linear 2 x 2 pode ter uma solução, nenhuma solução ou infinitas soluções. De acordo com o número de soluções, podemos classificá-lo da seguinte maneira:

- Possível: admite solução
 - SPD: sistema possível e determinado. Uma única solução.
 - SPI: sistema possível e indeterminado. Infinitas soluções.
- Impossível: não admite solução
 - SI: sistema impossível.

Exemplos:

1 - Sistema possível e determinado (SPD)

$$\begin{cases} 3x + 2y = 31 \\ 2x + y = 18 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por -2 e adicionando o resultado, a primeira equação, temos:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 31 \\ 2x + y = 18 \cdot (-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 31 \\ -4x - 2y = -36 \end{cases} \Rightarrow -x = -5 \Rightarrow x = 5$$

Com o valor de x, podemos substituí-lo em uma das equações:

$$2x + y = 18 \Rightarrow 2(5) + y = 18 \Rightarrow y = 18 - 10 \Rightarrow y = 8$$

Podemos observar que para satisfazer ambas as equações, encontramos apenas uma solução válida. Portanto, trata-se de um sistema possível e determinado (SPD), no qual admite-se apenas uma única solução.

2 - Sistema possível e indeterminado (SPI)

$$\begin{cases} 3x - y = -3 \\ 6x - 2y = -6 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por -2 e adicionando o resultado a segunda equação, temos:

$$\begin{cases} 3x - y = -3 (\cdot -2) \\ 6x - 2y = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x + 2y = 6 \\ 6x - 2y = -6 \end{cases} \Rightarrow 0x + 0y = 0$$

Podemos observar que para quaisquer valores reais que atribuirmos a x ou y, a sentença $0x + 0y = 0$ é verdadeira. Ao atribuir valores para x e y nas equações, temos:

- Se $x = -1$ e $y = 0$, então:

$$(I) 3x - y = -3 \Rightarrow 3(-1) - 0 = -3 \Rightarrow -3 = -3$$

$$(II) 6x - 2y = -6 \Rightarrow 6(-1) - 2(0) = -6 \Rightarrow -6 = -6$$

- Se $x = 0$ e $y = 3$, então:

$$(I) 3x - y = -3 \Rightarrow 3(0) - 3 = -3 \Rightarrow -3 = -3$$

$$(II) 6x - 2y = -6 \Rightarrow 6(0) - 2(3) = -6 \Rightarrow -6 = -6$$

Portanto, trata-se de um sistema possível e indeterminado (SPI), o qual admite infinitas soluções.

3 - Sistema Impossível (SI)

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 2y = 0 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por 2, e adicionando o resultado a segunda equação, temos:

$$\begin{cases} 3x - y = 1 (\cdot 2) \\ 6x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x + 2y = -2 \\ 6x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow 0x + 0y = -2$$

Observe que ao atribuirmos quaisquer valores reais para x e para y, a sentença $0x + 0y = -2$ nunca será verdadeira. Podemos atribuir valores para x e y e verificar no sistema:

- Se $x = 1$ e $y = 2$, temos:

$$3x - y = 1 \Rightarrow 3(1) - 2 = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

$$6x - 2y = 0 \Rightarrow 6(1) - 2(2) = 0 \Rightarrow 2 \neq 0$$

Note que o par ordenado $(1, 2)$ satisfaz apenas a primeira equação, ou seja, não é solução do sistema.

- Se $x = 1$ e $y = 3$, temos:

$$3x - y = 1 \Rightarrow 3(1) - 3 = 1 \Rightarrow 0 \neq 1$$

$$6x - 2y = 0 \Rightarrow 6(1) - 2(3) = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Note que o par ordenado $(1, 3)$ satisfaz apenas a segunda equação, ou seja, não é solução do sistema.

Portanto, trata-se de um sistema impossível (SI), o qual não admite uma solução.

Atividade 3: Estudo das classificações dos sistemas lineares utilizando o Geogebra.

Neste momento, os alunos serão conduzidos ao laboratório para desenvolver uma atividade prática, na qual eles vão representar no Geogebra os sistemas lineares, com o intuito de ter uma melhor visualização e compreensão de como classificar estes sistemas, partindo do número de soluções possíveis. Para tal, o professor vai trazer um passo a passo (Apêndice II) de como inserir os sistemas lineares, utilizando o exemplo da lanchonete visto anteriormente.

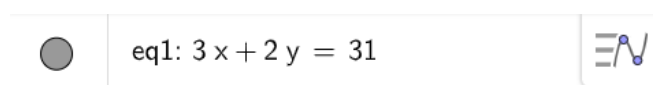
Exploração dos sistemas lineares 2 x 2 no Geogebra

Utilizando o exemplo da lanchonete, vamos ao passo a passo:

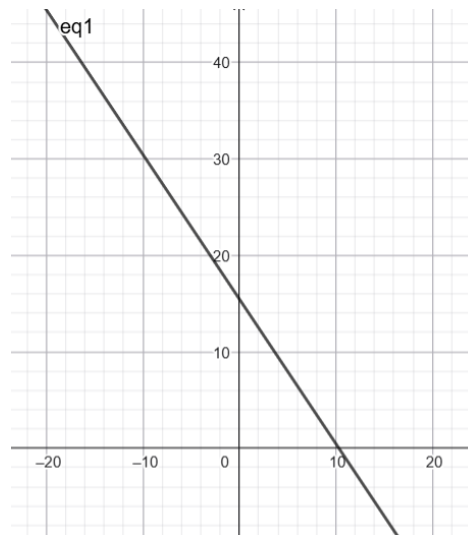
1 - Insira no campo de entrada do Geogebra a equação $3x + 2y = 31$.



Inserindo:



Reta:

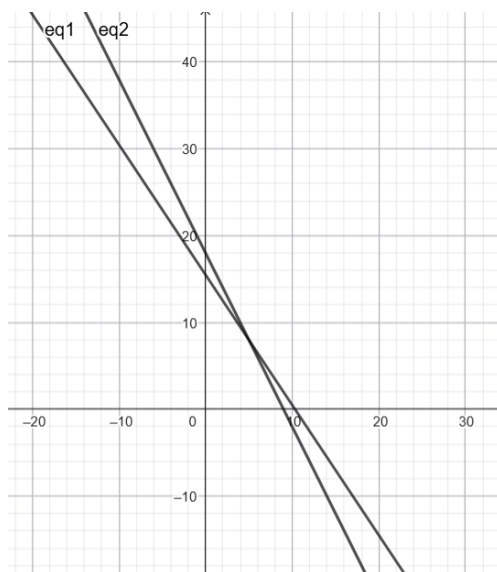


2 - Insira também a equação $2x + y = 18$

Inserindo:

eq2: $2x + y = 18$

Retas:



3 - Para melhor visualização, clique com o botão direito do mouse na reta eq 1 e vá até a aba  Configurações.

Com a janela de configurações aberta, na aba básico clique na entrada Nome eq1 e renomeie como “r”.

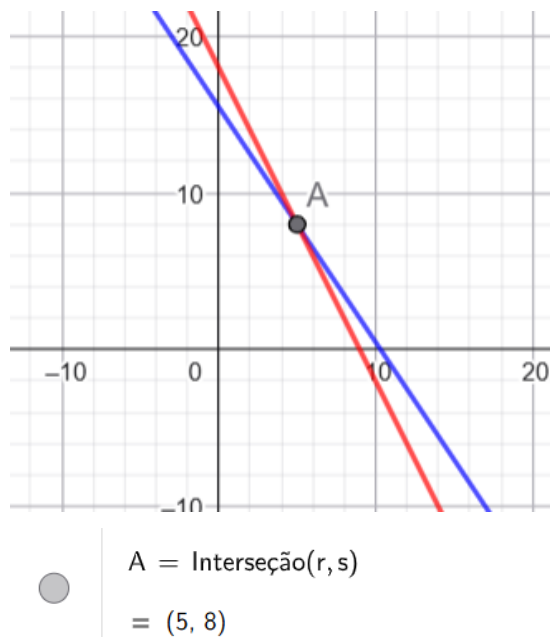
 Na aba cor, escolha a cor azul. Faça o mesmo com a reta eq 2 e renomeie como “s” e escolha a cor vermelha.

Retas:



4 - Clique no bloco “Ponto” , desça a janela e clique em “Intersecção de Dois Objetos” . Então clique em ambas as retas em sequência.

Ponto de intersecção das retas r e s:



A partir da visualização no Geogebra, responda:

a) O que ocorreu com as retas?

Resposta: Elas se interceptam no ponto A (5, 8)

b) O ponto encontrado é solução do sistema linear? Se sim, qual a sua classificação?

Resposta: Sim. O ponto A é o local onde ambas as retas se cruzam, o que significa que ele satisfaz ambas as equações lineares, enquanto também é a única solução do sistema linear. Portanto, trata-se de um sistema possível e determinado (SPD).

Atividade 4: Represente graficamente no Geogebra, os sistemas desenvolvidos anteriormente, e analise as soluções encontradas, classificando cada um dos sistemas:

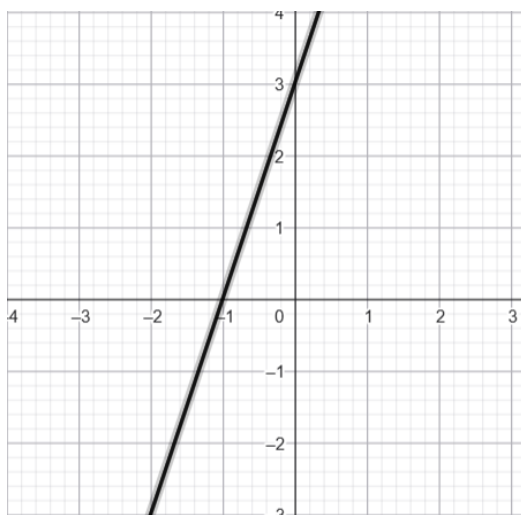
a)
$$\begin{cases} 3x - y = -3 \\ 6x - 2y = -6 \end{cases}$$

Primeiramente, vamos inserir as equações no campo de entrada do Geogebra:

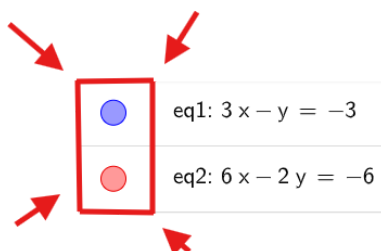
$$\text{eq1: } 3x - y = -3$$

$$\text{eq2: } 6x - 2y = -6$$

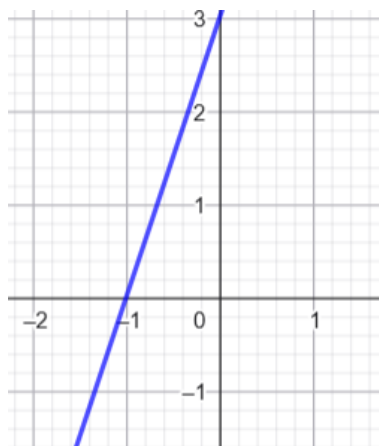
Agora, vamos visualizar o gráfico gerado:



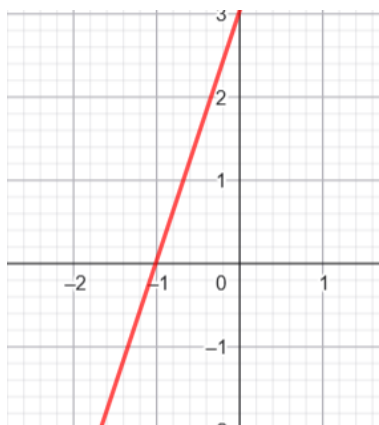
Podemos observar que há apenas uma única reta presente no plano cartesiano. Então, vamos determinar cores diferentes para cada equação, conforme orientado antes. Após atribuir as cores, observe os dois círculos coloridos ao lado da caixa de entrada de cada equação:



Ambos estão preenchidos, o que significa que ambas as equações estão aparecendo no gráfico. Vamos clicar no círculo de baixo, deixando ele sem preenchimento, assim apenas a primeira reta da equação ficará visível:



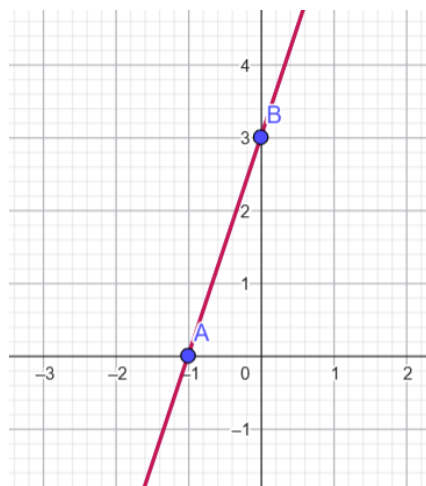
Vamos repetir o processo, tornando apenas a outra reta da equação visível:



Podemos notar que são retas coincidentes, isto é, possuem todos os pontos em comum. Para melhor visualização, vamos utilizar as soluções encontradas, criando os pontos A (-1, 0) e B (0, 3). Para tal, digitamos os pares ordenados na caixa de entrada:

●	A = (-1, 0)
●	B = (0, 3)

No gráfico, temos:



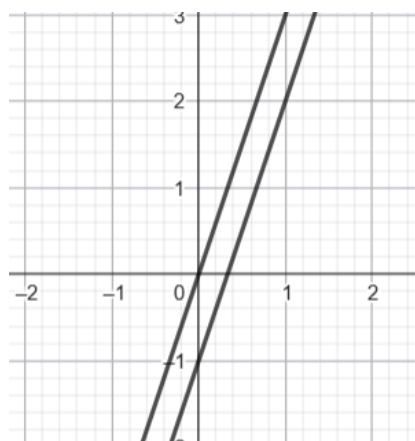
Podemos notar que os pontos estão presentes em ambas as retas que representam as equações, o que confirma que existem infinitos pontos em comum. Portanto, estamos diante de um sistema possível e indeterminado (SPI), pois existem infinitas soluções que satisfazem ambas as equações do sistema.

b)
$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 2y = 0 \end{cases}$$

Inserindo as equações na caixa de entrada, temos:

☐	eq1: $3x - y = 1$
☐	eq2: $6x - 2y = 0$

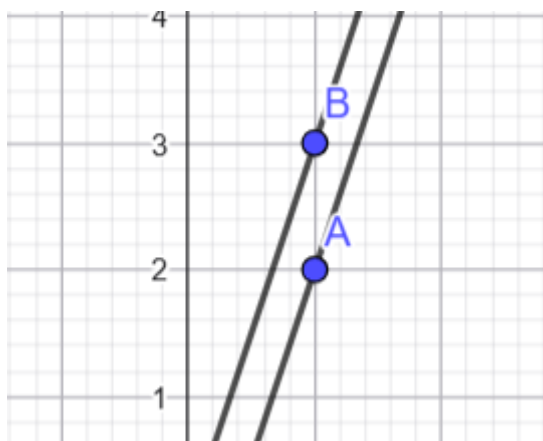
O gráfico gerado é o seguinte:



Podemos notar que as retas são paralelas, ou seja, não existem pares ordenados que estejam presentes simultaneamente em ambas as retas das equações. Da mesma forma que no sistema anterior, vamos criar no geogebra os pontos A (1, 2) e B (1, 3):

	A = (1, 2)
	B = (1, 3)

No gráfico, temos:



Observemos que os pares ordenados pertencem a retas distintas, não existindo simultaneamente nas equações. Portanto, estamos diante de um sistema impossível (SI), onde não há uma solução que satisfaça todo o sistema linear.

Sistematização/Fechamento da Aula:

Atividade 5: Entregar um material impresso (Apêndice II) com exercícios sobre sistemas lineares 2 x 2.

LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Miguel fabrica doces para festas: por uma encomenda de 60 brigadeiros e 40 cajuzinhos, ele cobrou R\$ 108,00; e por uma de 50 brigadeiros e 50 cajuzinhos, R\$ 115,00. Sabendo que em ambas as encomendas não houve alteração no preço de cada doce, o preço da dezena de brigadeiro e o da dezena de cajuzinho são, respectivamente:

a) R\$ 8,00 e R\$ 15,00

b) R\$ 11,00 e R\$ 10,50

c) R\$ 9,00 e R\$ 14,00

Resposta:

Como o problema pede o preço em dezena, podemos atribuir x como preço dos brigadeiros e y dos cajuzinhos.

Montando o sistema linear, temos:

$$\begin{cases} 6x + 4y = 108 \\ 5x + 5y = 115 \end{cases}$$

Pelo método da adição, temos:

$$\begin{cases} 6x + 4y = 108 \quad (\cdot -5) \\ 5x + 5y = 115 \quad (\cdot 6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -30x - 20y = -540 \\ 30x + 30y = 690 \end{cases} \Rightarrow 10y = 150 \Rightarrow y = \frac{150}{10} \Rightarrow y = 15$$

Substituindo y em uma das equações, temos:

$$6x + 4y = 108 \Rightarrow 6x + 4(15) = 108 \Rightarrow 6x = 108 - 60 \Rightarrow x = \frac{48}{6} \Rightarrow x = 8$$

Portanto, o preço da dezena de brigadeiros é R\$ 8,00 e o preço da dezena de cajuzinhos é R\$ 15,00.

2) Verifique qual dos pares a seguir é solução do sistema $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$

a) (0, 0)

b) (2, -2)

c) (-2, 4)

Resposta:

Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \quad (\cdot -2) \\ 3x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x - 2y = 0 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow -x = 2 \Rightarrow x = -2$$

Substituindo x em uma das equações, temos:

$$2x + y = 0 \Rightarrow 2(-2) + y = 0 \Rightarrow y = 4$$

Portanto, o par ordenado (-2, 4) é solução do sistema.

3) Classifique cada sistema em SPD, SPI ou SI. Construa o gráfico.

$$a) \begin{cases} x - 3y = 1 \\ -2x + 6y = -2 \end{cases}$$

Resposta:

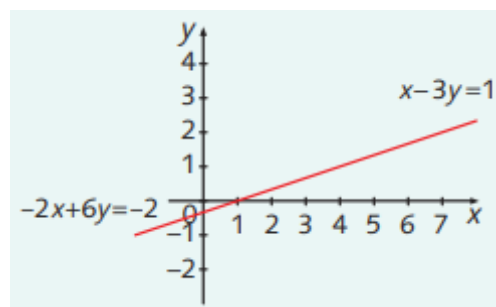
$$\begin{cases} x - 3y = 1 \text{ (I)} \\ -2x + 6y = -2 \text{ (II)} \end{cases}$$

Para resolvermos o sistema pelo método da substituição, isolamos x em I e substituímos em II:

$$\begin{aligned} x - 3y = 1 &\Rightarrow x = 1 + 3y \\ -2x + 6y = -2 &\Rightarrow -2(1 + 3y) + 6y = -2 \Rightarrow -2 - 6y + 6y = -2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -6y + 6y = -2 + 2 \Rightarrow 0y = 0 \end{aligned}$$

Podemos notar que para qualquer número real y , a sentença ($0y = 0$) é verdadeira. Portanto, existem infinitos pares que são soluções do sistema.

Gráfico:



Assim, algumas soluções são: $(-5, -2)$, $(-2, -1)$ e $(1, 0)$. Trata-se, portanto, de um sistema possível e indeterminado (SPI).

$$b) \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x - 2y = 5 \end{cases}$$

Resposta:

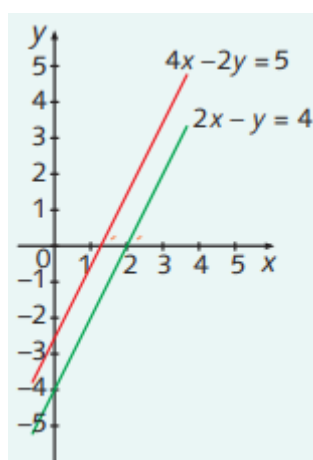
$$\begin{cases} 2x - y = 4 \text{ (I)} \\ 4x - 2y = 5 \text{ (II)} \end{cases}$$

Para resolvermos pelo método da adição, multiplicamos a equação I por -2 , em seguida, adicionamos as equações:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x - 2y = 5 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} -4x + 2y = -8 \\ 4x - 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow 0x + 0y = -3$$

Podemos notar que não existem números reais para x e y que tornem a sentença $0x + 0y = -3$ verdadeira. Portanto, o sistema não possui soluções reais.

Gráfico:



Nota-se que são retas paralelas, ou seja, não possuem pontos em comum. Nesse caso, trata-se de um sistema impossível (SI).

8. Avaliação

A avaliação da aprendizagem será realizada de forma contínua e processual, considerando a participação dos alunos nas discussões iniciais e na retomada dos conceitos de equações lineares, o desempenho na resolução algébrica dos sistemas lineares propostos e a capacidade de interpretar graficamente os sistemas no plano cartesiano e no software GeoGebra, classificando-os em SPD, SPI ou SI. Também será observado o envolvimento e a colaboração nas atividades desenvolvidas no Laboratório de Informática, bem como a produção escrita por meio da resolução das atividades em fotocópias e da lista de exercícios entregue. Dessa forma, a avaliação assumirá caráter diagnóstico, ao retomar os conhecimentos prévios dos estudantes; formativo, ao acompanhar e orientar o processo de aprendizagem durante as atividades; e somativo, ao verificar os registros e resultados finais obtidos pelos alunos.

9. Bibliografias

ANDRADE, Thaís M. de. **Matemática Interligada: Matrizes, sistemas lineares e Geometria analítica**. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020.

ASTH, Rafael C. **Sistemas Lineares: o que são, tipos e como resolver**. Toda Matéria. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/sistemas-lineares/>>. Acesso em: 28 set. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

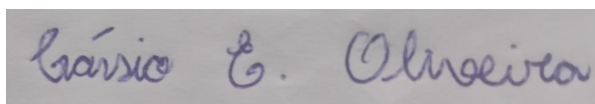
DANTE, Luiz R. **Matemática: Contexto & Aplicações** - 2º ano: Ensino Médio. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

GOUVEIA, Rosimar. **Equação do Primeiro Grau**. Toda Matéria. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/equacao-do-primeiro-grau/>>. Acesso em: 28 set. 2025.

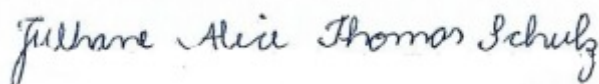
LEONARDO, Fábio M. de. **Conexões: Matemática e suas tecnologias** - Matrizes e Geometria analítica. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2020.

10. Observações

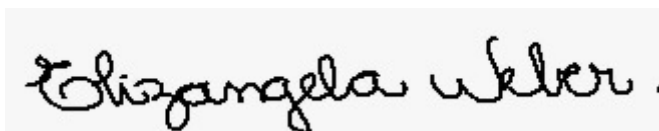
Na introdução aos sistemas lineares, observou-se forte participação dos estudantes na discussão sobre os métodos algébricos. A utilização do Geogebra trouxe dinamismo à aula e colaborou para a compreensão visual da solução dos sistemas. Os alunos demonstraram entusiasmo ao relacionar as representações gráficas às resoluções algébricas. Alguns tiveram dificuldades tecnológicas iniciais, mas rapidamente se integraram ao processo. Houve participação ativa, questionamentos pertinentes e boa capacidade de análise. O objetivo da aula foi alcançado com eficiência.



Cássio Emanuel Oliveira
Aluno – Estagiário



Julhane Thomas Schulz
Supervisor – Parte Concedente

A handwritten signature in black ink on a light gray background. The signature reads "Elizangela Weber." in a cursive script.

Elizangela Weber
Professor Orientador – Entidade Educacional

Apêndice I - Resumo: Sistemas lineares

SISTEMAS LINEARES

Denominamos sistema linear $m \times n$ um conjunto S de m equações lineares com n incógnitas, sendo m e n números naturais e maiores do que zero.

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

em que:

- $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são as incógnitas;
- $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}$ são os coeficientes das incógnitas;
- $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m$ são os termos independentes.

Exemplos:

- $\begin{cases} x - y = 12 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$ Sistema linear 2×2 , ou seja, com duas equações lineares e duas incógnitas (x e y).
- $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 2z = 15 \\ x + 4y - z = -7 \end{cases}$ Sistema linear 3×3 , ou seja, com três equações lineares e três incógnitas (x , y e z).

Solução de um sistema linear 2×2

Exemplo: Em uma lanchonete, a conta de João (3 pastéis e 2 sucos) foi R\$ 31,00, e a de Maria (2 pastéis e 1 suco) foi R\$ 18,00. Qual o preço de cada item?"

Classificação de um sistema linear 2×2

Um sistema linear 2×2 pode ter uma solução, nenhuma solução ou infinitas soluções. De acordo com o número de soluções, podemos classificá-lo da seguinte maneira:

- Possível: admite solução
 - SPD: sistema possível e determinado. Uma única solução.
 - SPI: sistema possível e indeterminado. Infinitas soluções.
- Impossível: não admite solução
 - SI: sistema impossível.

1 - Sistema possível e determinado (SPD)

$$\begin{cases} 3x + 2y = 31 \\ 2x + y = 18 \end{cases}$$

2 - Sistema possível e indeterminado (SPI)

$$\begin{cases} 3x - y = -3 \\ 6x - 2y = -6 \end{cases}$$

3 - Sistema Impossível (SI)

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 2y = 0 \end{cases}$$

Apêndice II - Exploração dos sistemas lineares 2 x 2 no Geogebra

Utilizando o exemplo da lanchonete, vamos ao passo a passo:

1 - Insira no campo de entrada do Geogebra a equação $3x + 2y = 31$.

2 - Insira também a equação $2x + y = 18$

3 - Para melhor visualização, clique com o botão direito do mouse na reta eq 1 e vá até a aba  Configurações.

Com a janela de configurações aberta, na aba  Nome básico clique na entrada  e renomeie como “r”. Na aba cor, escolha a cor azul . Faça o mesmo com a reta eq 2 e renomeie como “s” e escolha a cor vermelha.

4 - Clique no bloco “Ponto” , desça a janela e clique em “Intersecção de Dois Objetos” . Então clique em ambas as retas em sequência.

A partir da visualização no Geogebra, responda:

a) O que ocorreu com as retas?

b) O ponto encontrado é solução do sistema linear? Se sim, qual a sua classificação?

Atividade: Represente graficamente no Geogebra, os sistemas desenvolvidos anteriormente, e analise as soluções encontradas, classificando cada um dos sistemas:

a)
$$\begin{cases} 3x - y = -3 \\ 6x - 2y = -6 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 2y = 0 \end{cases}$$

Apêndice III - Lista de exercícios sobre sistemas lineares 2 x 2

LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Miguel fabrica doces para festas: por uma encomenda de 60 brigadeiros e 40 cajuzinhos, ele cobrou R\$ 108,00; e por uma de 50 brigadeiros e 50 cajuzinhos, R\$ 115,00. Sabendo que em ambas as encomendas não houve alteração no preço de cada doce, o preço da dezena de brigadeiro e o da dezena de cajuzinho são, respectivamente:

- a) R\$ 8,00 e R\$ 15,00
- b) R\$ 11,00 e R\$ 10,50
- c) R\$ 9,00 e R\$ 14,00

2) Verifique qual dos pares a seguir é solução do sistema $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$

- a) (0, 0)
- b) (2, -2)
- c) (-2, 4)

3) Classifique cada sistema em SPD, SPI ou SI. Construa o gráfico.

a) $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ -2x + 6y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x - 2y = 5 \end{cases}$

Plano de Aula Semanal nº 7

Acadêmico: Cássio Emanuel Oliveira

Professor(a) Orientador(a): Elizangela Weber

Unidade Concedente: Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia Farroupilha

Estágio – Turma/Nº de alunos: 2º ano - 33 alunos

Professor(a) Regente da Classe: Julhane Thomas Schulz

Data/Horário: 02/10/2025 – 2 períodos - 13h30min às 15h

1 .Tema/Assunto:

Números e Álgebra - Sistemas lineares

2. Objetos de Conhecimento:

- Solução de sistemas lineares 2×2 ;
- Solução de sistemas lineares 3×3 - Regra de Cramer

3. Habilidades relativas a BNCC:

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

4 . Objetivos

- Retomar os métodos de resolução de sistemas lineares 2×2 (adição, substituição e comparação).
- Identificar e classificar sistemas lineares quanto ao número de soluções (SPD, SPI e SI).
- Compreender a estrutura e representação matricial de sistemas lineares 3×3 .
- Aplicar a Regra de Cramer na resolução de sistemas lineares 3×3 .
- Resolver problemas envolvendo sistemas lineares, interpretando seus resultados em contextos matemáticos e cotidianos.

5. Metodologia

Método Expositivo e Dialogado.

6. Recursos

Materiais de uso comum: lápis, caderno, borracha, folhas, etc.

Materiais/recursos didáticos: material impresso

7. Desenvolvimento

Incentivação:

No primeiro momento, será desenvolvida uma retomada dos conceitos relacionados ao sistema linear 2×2 . O professor vai desenvolver no quadro alguns exemplos de Sistemas Lineares, trazendo os 3 tipos de métodos de resolução: adição, substituição e comparação.

1. Método da adição

O método da adição consiste em realizar a multiplicação de todos os termos de uma das equações, de tal modo que, ao somar-se a equação I na equação II, uma de suas incógnitas fique igual a zero.

Exemplo:
$$\begin{cases} 5x - 4y = -5 \\ x + 2y = 13 \end{cases}$$

1º - Multiplicar a equação II por 2, para que os coeficientes fiquem opostos, assim temos:

$$\begin{aligned} \text{I. } 5x - 4y &= -5 \\ \text{II. } 2x + 4y &= 26 \quad (\times 2) \end{aligned}$$

2º - Somando as equações, temos:

$$\begin{cases} 5x - 4y = -5 \\ 2x + 4y = 26 \end{cases} \Rightarrow 7x = 21 \Rightarrow x = \frac{21}{7} \Rightarrow x = 3$$

3º - Substituindo x em uma das equações, temos:

$$\text{II. } x + 2y = 13 \Rightarrow 3 + 2y = 13 \Rightarrow 2y = 10 \Rightarrow y = \frac{10}{2} \Rightarrow y = 5$$

Portanto, a solução do sistema é $x = 3$ e $y = 5$, ou seja o ponto (3, 5).

2. Método da substituição

O método da substituição consiste em isolar uma das incógnitas em uma das equações e realizar a substituição na outra equação.

Exemplo:
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$$

1º - Vamos escolher a incógnita que seja mais fácil de ser isolada. Analisando as equações, vemos que na 1ª equação $x + 2y = 5$ (I), o x tem coeficiente 1, tornando mais fácil isolá-lo. Assim, temos:

$$\text{I. } x + 2y = 5 \Rightarrow x = 5 - 2y$$

2º - Substituindo a expressão encontrada para o x na outra equação (II), temos:

$$\text{II. } 3x - 5y = 4 \Rightarrow 3(5 - 2y) - 5y = 4 \Rightarrow 15 - 6y - 5y = 4 \Rightarrow -11y = -11 \Rightarrow y = 1$$

3º - Substituindo y na 1ª equação, temos:

$$x = 5 - 2y \Rightarrow x = 5 - 2(1) \Rightarrow x = 3$$

Portanto, a solução do sistema é $x = 3$ e $y = 1$, ou seja o ponto $(3, 1)$.

3. Método da comparação

O método da comparação consiste em isolarmos uma incógnita nas duas equações e igualar esses valores.

Exemplo:
$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 3y = -4 \end{cases}$$

1º - Vamos escolher uma das incógnitas para isolar em ambas as equações. Isolando x , temos:

$$\begin{aligned} \text{I. } 2x + y = 2 &\Rightarrow x = \frac{2-y}{2} \\ \text{II. } x + 3y = -4 &\Rightarrow x = -4 - 3y \end{aligned}$$

2º - Vamos igualar as duas novas equações, já que $x = x$.

$$\frac{2-y}{2} = -4 - 3y \Rightarrow 2 - y = 2(-4 - 3y) \Rightarrow 2 - y = -8 - 6y \Rightarrow 5y = -10 \Rightarrow y = -2$$

3º - Substituindo y em uma das equações, temos:

$$x = \frac{2-y}{2} = \frac{2-(-2)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Portanto, a solução do sistema é $x = 2$ e $y = -2$, ou seja o ponto $(2, -2)$.

Na sequência, vamos retomar os três tipos de classificação de sistemas lineares, SPD, SPI e SI, definindo suas principais características.

1. Sistema Possível e Determinado - SPD

Exemplo:
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Pelo método da adição, temos:

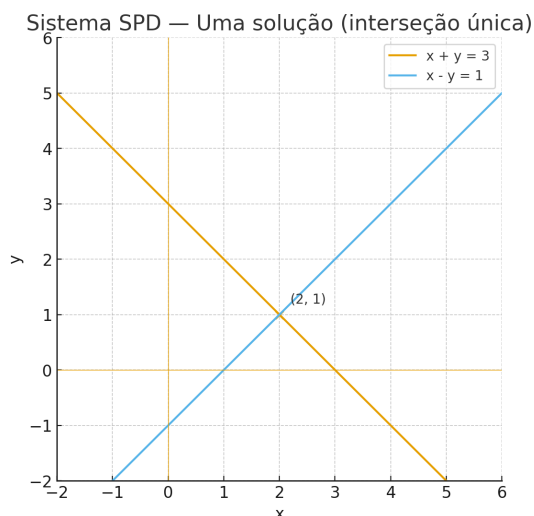
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} \Rightarrow x = 2$$

Substituindo x , temos:

$$x + y = 3 \Rightarrow 2 + y = 3 \Rightarrow y = 1$$

Portanto, a solução do sistema é $S = \{2, 1\}$

No gráfico, temos:



Podemos notar que ao representar essas equações no plano cartesiano, nos deparamos com duas **retas concorrentes**, ou seja, elas se interceptam em um único ponto: (2, 1), que é a solução do Sistema. Portanto, quando nos deparamos com retas concorrentes, temos um sistema possível e determinado (SPD), que admite uma única solução.

2. Sistema Possível e Indeterminado - SPI

Exemplo:
$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

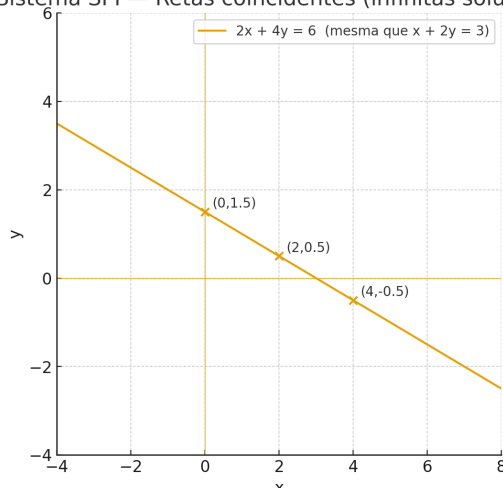
Podemos notar que a primeira equação é exatamente o dobro da segunda. Resolvendo a equação, pelo método da adição, temos:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ -2x - 4y = -6 \end{cases} \xrightarrow{(\times 2)} 0x + 0y = 0$$

Ao analisarmos a equação resultante, podemos perceber que quaisquer valores que atribuirmos para x e y , vão tornar a sentença $0x + 0y = 0$ verdadeira. Isso demonstra que ambas as equações são dependentes entre si.

No gráfico, temos:

Sistema SPI — Retas coincidentes (infinitas soluções)



Note que no gráfico aparece uma única reta, o que demonstra que ambas as equações representam a mesma reta no plano cartesiano. Ou seja, tratam-se de **retas coincidentes**, nas quais existem **infinitos pontos em comum** (toda reta). Portanto, estamos diante de um sistema possível e indeterminado (SPI), em que existem infinitas soluções para o sistema.

3. Sistema Impossível - SI

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$$

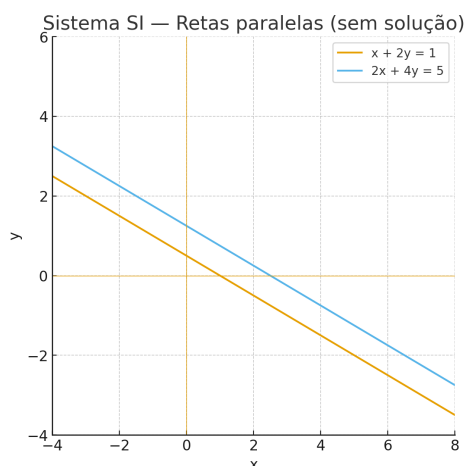
Exemplo:

Note que os coeficientes das incógnitas são proporcionais. Se multiplicarmos a 1ª equação por -2, temos:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} -2x - 4y = -2 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases} \Rightarrow 0x + 0y = 3$$

Ao analisarmos a equação resultante, podemos notar que trata-se de uma contradição, pois independentemente do valor que atribuímos a x e y vamos obter como resultado $0 = 5$. Ou seja, a sentença não se tornou verdadeira, o que demonstra que não existe solução para o problema.

No gráfico, temos:



Note que temos duas **retas paralelas**, pois os coeficientes de x e y são proporcionais. Porém os termos independentes diferem ($2 \neq 5$), então temos duas retas paralelas distintas que nunca se encontram, isto é, não possuem **nenhum ponto em comum**. Portanto, estamos diante de um sistema impossível (SI), em que não existe solução.

Na sequência, o professor irá apresentar no quadro um resumo para os alunos registrarem no caderno:

SISTEMA	SOLUÇÃO	RETAS	GRÁFICO
SPD	uma única solução	Concorrentes	
SPI	infinitas soluções	Coincidentes	
SI	não tem solução	Paralelas	

Desenvolvimento da aula:

Atividade 1: Entregar um material impresso (Apêndice I) para apresentar o conteúdo de sistemas lineares 3 x 3.

Sistemas Lineares 3 x 3

Os sistemas lineares 3 x 3, diferentemente dos sistemas lineares 2 x 2, possuem três incógnitas e três equações lineares. Abaixo, temos alguns exemplos:

$$a) \begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases} \text{ três incógnitas e três equações (3 x 3)}$$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 2y + 2z = 10 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \text{ três incógnitas e três equações (3 x 3)}$$

Quando estamos diante de um sistema linear com três incógnitas, adotamos outros métodos de resolução. Estes métodos de resolução relacionam os coeficientes com matrizes, e os métodos mais utilizados são a regra de Cramer e o Escalonamento. Para a resolução em ambos os métodos, é necessário a representação matricial do sistema. Existem duas possíveis representações, a matriz completa e a matriz incompleta:

Exemplo:

Temos o sistema 3 x 3 genérico:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = d \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = e \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = f \end{cases}$$

A matriz completa é aquela que apresenta todos os coeficientes das incógnitas e os termos independentes das equações:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & d \\ b_1 & b_2 & b_3 & e \\ c_1 & c_2 & c_3 & f \end{pmatrix}$$

Já a matriz incompleta apresenta apenas os coeficientes das incógnitas:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Regra de Cramer

Para encontrarmos soluções de um sistema 3 x 3, com incógnitas x, y e z, utilizando a Regra de Cramer, é necessário calcularmos o determinante da matriz incompleta e suas variações. Temos então que:

$$x = \frac{D_x}{D} \quad y = \frac{D_y}{D} \quad z = \frac{D_z}{D}$$

D - Determinante da matriz incompleta

D_x - determinante da matriz incompleta do sistema, substituindo-se a coluna de x pela coluna dos termos independentes.

D_y - determinante da matriz incompleta do sistema, substituindo-se a coluna de y pela coluna dos termos independentes.

D_z - determinante da matriz incompleta do sistema, substituindo-se a coluna de z pela coluna dos termos independentes.

Dessa forma, para encontrar as incógnitas do sistema, primeiramente devemos calcular os determinantes D, D_x , D_y e D_z associado ao sistema.

Exemplos:

$$a) \begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

Solução:

Primeiramente, vamos obter a matriz incompleta do sistema. Temos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculando o determinante D, temos:

$$D = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot (-1)$$

$$D = 1 + 1 + 4 + 1 - 2 + 2$$

$$D = 7$$

Agora, vamos obter a matriz D_x . Temos:

$$D_x = \begin{pmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & -1 & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Calculando D_x , temos:

$$D_x = 10 \cdot (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 5 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \cdot 3 - 10 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 5 \cdot (-1)$$

$$D_x = 10 + 3 + 10 + 3 - 20 + 5$$

$$D_x = 11$$

Agora, vamos obter a matriz D_y . Temos:

$$D_y = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{10} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Calculando D_y , temos:

$$D_y = 1 \cdot 5 \cdot (-1) + 10 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 3 - 10 \cdot 2 \cdot (-1)$$

$$D_y = -5 + 10 + 6 - 5 - 3 + 20$$

$$D_y = 23$$

Agora, vamos obter a matriz D_z . Temos:

$$D_z = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{10} \\ \mathbf{2} & -1 & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

Calculando D_z , temos:

$$D_z = 1 \cdot (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 5 \cdot 1 + 10 \cdot 2 \cdot 2 - 10 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 5 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 3$$

$$D_z = -3 + 5 + 40 + 10 - 10 - 6$$

$$D_z = 36$$

Com os determinantes obtidos, podemos encontrar os valores das incógnitas. Assim, temos:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{11}{7}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{23}{7}$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{36}{7}$$

Portanto, a solução do sistema é $S = \left\{ \frac{11}{7}, \frac{23}{7}, \frac{36}{7} \right\}$.

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + 3y + 2z = 4 \\ 3x - 2y + z = -5 \end{cases}$$

Solução:

1º - Montar a matriz incompleta:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2º - Calculando D:

$$\begin{aligned} D &= 2 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 \cdot (-2) - (-1) \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 \cdot 1 \\ D &= 6 + 6 + 2 + 9 + 8 - 1 \\ D &= 30 \end{aligned}$$

Montando a matriz D_x , temos:

$$D_x = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & 1 & -1 \\ \mathbf{4} & 3 & 2 \\ -\mathbf{5} & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculando D_x , temos:

$$\begin{aligned} D_x &= 3 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot (-5) + (-1) \cdot 4 \cdot (-2) - (-1) \cdot 3 \cdot (-5) - 3 \cdot 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 4 \cdot 1 \\ D_x &= 9 - 10 + 8 - 15 + 12 - 4 \\ D_x &= 0 \end{aligned}$$

Montando a matriz D_y , temos:

$$D_y = \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{3} & -1 \\ 1 & \mathbf{4} & 2 \\ 3 & -\mathbf{5} & 1 \end{pmatrix}$$

Calculando D_y , temos:

$$\begin{aligned} D_y &= 2 \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 \cdot (-5) - (-1) \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot (-5) - 3 \cdot 1 \cdot 1 \\ D_y &= 8 + 18 + 5 + 12 + 20 - 3 \\ D_y &= 60 \end{aligned}$$

Montando a matriz D_z , temos:

$$D_z = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Calculando D_z , temos:

$$D_z = 2 \cdot 3 \cdot (-5) + 1 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 \cdot (-5)$$

$$D_z = -30 + 12 - 6 - 27 + 16 + 5$$

$$D_z = -30$$

Agora, encontrando as incógnitas, temos:

$$x = \frac{0}{30} = 0$$

$$y = \frac{60}{30} = 2$$

$$z = \frac{-30}{30} = -1$$

Portanto, a solução do sistema é $S = \{0, 2, -1\}$

Sistematização/Fechamento da Aula:

Entregar um material impresso (Apêndice II) com uma lista de exercícios para sistematizar o conteúdo desenvolvido ao longo da aula.

LISTA DE EXERCÍCIOS

1 - Resolvendo o sistema linear a seguir

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 4x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

podemos afirmar que o valor de z que satisfaz esse sistema é igual a:

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 5

Solução:

1º - Vamos determinar a matriz incompleta:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Calculando o determinante D, temos:

$$\begin{aligned} D &= 2 \cdot (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 3 - (-1) \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot (-2) \\ D &= 4 + 1 - 3 - 1 - 6 + 2 \\ D &= -3 \end{aligned}$$

2º - Vamos encontrar a matriz D_z :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

Calculando o determinante D_z , temos:

$$\begin{aligned} D_z &= 2 \cdot (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 3 \\ D_z &= -6 + 2 + 3 + 1 - 12 - 3 \\ D_z &= -15 \end{aligned}$$

Agora, vamos encontrar z:

$$x = \frac{D_z}{D} = \frac{-15}{-3} = 5$$

2 - (IFPE) Com a proximidade do final do ano, uma papelaria quis antecipar as promoções de material didático para o ano letivo de 2012. Foram colocados em promoção caneta, caderno e lápis. As três ofertas eram:

- 1ª) 5 canetas, 4 cadernos e 10 lápis por R\$ 62,00;
- 2ª) 3 canetas, 5 cadernos e 3 lápis por R\$ 66,00;
- 3ª) 2 canetas, 3 cadernos e 7 lápis por R\$ 44,00.

Para comparar os preços unitários dessa papelaria com outras do comércio, o Sr. Ricardo calculou os preços de uma caneta, um caderno e um lápis. A soma desses preços é

- A) R\$ 20,00.
- B) R\$ 18,00.
- C) R\$ 16,00.
- D) R\$ 14,00.
- E) R\$ 12,00.

Solução:

Definindo x como preço da caneta, y como preço do caderno e z como preço do lápis, temos o sistema:

$$\begin{cases} 5x + 4y + 10z = 62 \\ 3x + 5y + 3z = 66 \\ 2x + 3y + 7z = 44 \end{cases}$$

Montando a matriz D , temos:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 10 \\ 3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

Calculando D , temos:

$$D = 5 \cdot 5 \cdot 7 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 10 \cdot 3 \cdot 3 - 10 \cdot 5 \cdot 2 - 5 \cdot 3 \cdot 3 - 4 \cdot 3 \cdot 7$$

$$D = 175 + 24 + 90 - 100 - 45 - 84$$

$$D = 60$$

Montando a matriz D_x , temos:

$$D_x = \begin{vmatrix} 62 & 4 & 10 \\ 66 & 5 & 3 \\ 44 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

Calculando D_x , temos:

$$D_x = 62 \cdot 5 \cdot 7 + 4 \cdot 3 \cdot 44 + 10 \cdot 66 \cdot 3 - 10 \cdot 5 \cdot 44 - 62 \cdot 3 \cdot 3 - 4 \cdot 66 \cdot 7$$

$$D_x = 2170 + 528 + 1980 - 2200 - 558 - 1848$$

$$D_x = 72$$

Montando a matriz D_y , temos:

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & 62 & 10 \\ 3 & 66 & 3 \\ 2 & 44 & 7 \end{vmatrix}$$

Calculando D_y , temos:

$$D_y = 5 \cdot 66 \cdot 7 + 62 \cdot 3 \cdot 2 + 10 \cdot 3 \cdot 44 - 10 \cdot 66 \cdot 2 - 5 \cdot 3 \cdot 44 - 62 \cdot 3 \cdot 7$$

$$D_y = 2310 + 372 + 1320 - 1320 - 660 - 1302$$

$$D_y = 720$$

Montando a matriz D_z , temos:

$$D_z = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 62 \\ 3 & 5 & 66 \\ 2 & 3 & 44 \end{vmatrix}$$

Calculando D_z , temos:

$$D_z = 5 \cdot 5 \cdot 44 + 4 \cdot 66 \cdot 2 + 62 \cdot 3 \cdot 3 - 62 \cdot 5 \cdot 2 - 5 \cdot 66 \cdot 3 - 4 \cdot 3 \cdot 44$$

$$D_z = 1100 + 528 + 558 - 620 - 990 - 528$$

$$D_z = 48$$

Agora, calculando x, y e z, temos:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{72}{60} = 1,2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{720}{60} = 12$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{48}{60} = 0,8$$

Agora vamos calcular o preço de todos itens somados, temos:

$$P = 1,2 + 12 + 0,8 = 14$$

3 - (Fuvest-SP)

Carlos e sua irmã Andreia foram com seu cachorro Bidu à farmácia de seu avô. Lá encontraram uma velha balança com defeito, que só indicava corretamente pesos superiores a 60 kg. Assim, eles se pesaram dois a dois e obtiveram as seguintes marcas:

Carlos e o cão pesam juntos 87 kg;

Carlos e Andreia pesam 123 kg;

Andreia e Bidu pesam 66 kg.

Determine o peso de cada uma deles:

Solução:

1º - Transformar os dados em um sistema:

$$\begin{cases} b + c = 87 \\ a + c = 123 \\ a + b = 66 \end{cases}$$

2º - Montar a matriz incompleta D:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Calculando D, temos:

$$D = 0 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0$$

$$D = 0 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0$$

$$D = 2$$

Montando a matriz D_b , temos:

$$D_b = \begin{vmatrix} 0 & 87 & 1 \\ 1 & 123 & 1 \\ 1 & 66 & 0 \end{vmatrix}$$

Calculando D_b , temos:

$$D_b = 0 \cdot 123 \cdot 0 + 87 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 66 - 1 \cdot 123 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 66 - 87 \cdot 1 \cdot 0$$

$$D_b = 0 + 87 + 66 - 123 - 0 - 0$$

$$D_b = 30$$

Calculando b, temos:

$$b = \frac{D_b}{D} = \frac{30}{2} = 15$$

Agora, basta substituir b nas equações. Temos:

$$b + c = 87 \Rightarrow 15 + c = 87 \Rightarrow c = 72$$

$$a + b = 66 \Rightarrow a + 15 = 66 \Rightarrow a = 51$$

Portanto, Andréia pesa 51 kg, Bidu pesa 15 kg e Carlos pesa 72 kg.

4 - Utilizando a Regra de Cramer, determine o valor da incógnita y no seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 3z = 18 \\ 3x + 2y + 5z = 23 \\ 5x + 4y + 2z = 27 \end{cases}$$

Solução:

1º - Montar a matriz incompleta do sistema:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Calculando o determinante D, temos:

$$\begin{aligned} D &= 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \cdot 5 + 3 \cdot 3 \cdot 4 - 3 \cdot 2 \cdot 5 - 2 \cdot 5 \cdot 4 - 3 \cdot 3 \cdot 2 \\ D &= 8 + 75 + 36 - 30 - 40 - 18 \\ D &= 31 \end{aligned}$$

Montar a matriz D_y :

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 18 & 3 \\ 3 & 23 & 5 \\ 5 & 27 & 2 \end{vmatrix}$$

Calculando D_y , temos:

$$\begin{aligned} D_y &= 2 \cdot 23 \cdot 2 + 18 \cdot 5 \cdot 5 + 3 \cdot 3 \cdot 27 - 3 \cdot 23 \cdot 5 - 2 \cdot 5 \cdot 27 - 18 \cdot 3 \cdot 2 \\ D_y &= 92 + 450 + 243 - 345 - 270 - 108 \\ D_y &= 62 \end{aligned}$$

Agora, calculando y, temos:

$$y = \frac{62}{31} \Rightarrow y = 2$$

Portanto, o valor da incógnita y no sistema é $y = 2$.

8. Avaliação

A avaliação será contínua e formativa, ocorrendo ao longo da aula por meio da observação da participação dos alunos, da resolução dos exemplos propostos e das atividades impressas. Serão considerados o envolvimento nas discussões, a compreensão dos conceitos de sistemas lineares e a capacidade de aplicar corretamente os métodos de resolução, especialmente a Regra de Cramer. A lista de exercícios servirá como instrumento de verificação da aprendizagem, permitindo identificar o grau de domínio do conteúdo e possíveis dificuldades individuais ou coletivas.

9. Bibliografias

ANDRADE, Thaís M. de. **Matemática Interligada: Matrizes, sistemas lineares e Geometria analítica**. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

DANTE, Luiz R. **Matemática: Contexto & Aplicações** - 2º ano: Ensino Médio. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

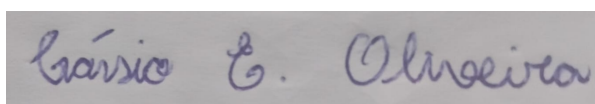
LEONARDO, Fábio M. de. **Conexões: Matemática e suas tecnologias** - Matrizes e Geometria analítica. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2020.

NOÉ, Marcos. **Exercícios sobre Regra de Cramer**. Brasil Escola. Disponível em: <<https://exercicios.brasilecola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-regra-cramer.htm>>. Acesso em: 4 out. 2025.

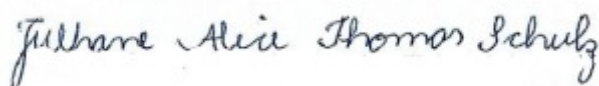
RODRIGUES, Raul. **Sistemas lineares: o que são, como resolver, tipos**. Brasil Escola. Disponível em: <<https://brasilecola.uol.com.br/matematica/sistemas-lineares.htm>>. Acesso em: 4 out. 2025.

10. Observações

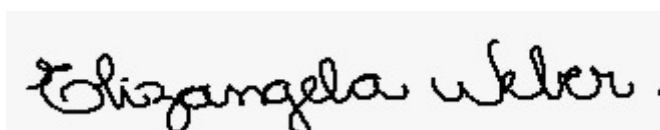
A aula dedicada à Regra de Cramer evidenciou maior exigência de concentração por parte dos alunos, devido à quantidade de cálculos envolvidos. Muitos demonstraram dificuldade inicial na organização dos determinantes auxiliares, especialmente no cuidado com sinais. No entanto, à medida que os exemplos foram realizados coletivamente, os estudantes apresentaram melhoria progressiva. A socialização de problemas contextualizados ampliou o sentido do conteúdo e fortaleceu a compreensão. A turma manteve boa interação e empenho ao longo da aula.



Cássio Emanuel Oliveira
Aluno – Estagiário



Julhane Alice Thomas Schulz
Supervisor – Parte Concedente



Elizangela Weber
Professor Orientador – Entidade Educacional

Apêndice I - Sistemas lineares 3 x 3: Regra de Cramer

Sistemas Lineares 3 x 3

Os sistemas lineares 3 x 3, diferentemente dos sistemas lineares 2 x 2, possuem três incógnitas e três equações lineares. Abaixo, temos alguns exemplos:

$$c) \quad \begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases} \quad \text{três incógnitas e três equações (3 x 3)}$$

$$d) \quad \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 2y + 2z = 10 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \quad \text{três incógnitas e três equações (3 x 3)}$$

Quando estamos diante de um sistema linear com três incógnitas, adotamos outros métodos de resolução. Estes métodos de resolução relacionam os coeficientes com matrizes, e os métodos mais utilizados são a regra de Cramer e o Escalonamento. Para a resolução em ambos os métodos, é necessário a representação matricial do sistema. Existem duas possíveis representações, a matriz completa e a matriz incompleta:

Exemplo:

Temos o sistema 3 x 3 genérico:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = d \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = e \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = f \end{cases}$$

A matriz completa é aquela que apresenta todos os coeficientes das incógnitas e os termos independentes das equações:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & d \\ b_1 & b_2 & b_3 & e \\ c_1 & c_2 & c_3 & f \end{pmatrix}$$

Já a matriz incompleta apresenta apenas os coeficientes das incógnitas:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Regra de Cramer

Para encontrarmos soluções de um sistema 3 x 3, com incógnitas x, y e z, utilizando a Regra de Cramer, é necessário calcularmos o determinante da matriz incompleta e suas variações. Temos então que:

$$x = \frac{D_x}{D} \quad y = \frac{D_y}{D} \quad z = \frac{D_z}{D}$$

D - Determinante da matriz incompleta

D_x - determinante da matriz incompleta do sistema, substituindo-se a coluna de x pela coluna dos termos independentes.

D_y - determinante da matriz incompleta do sistema, substituindo-se a coluna de y pela coluna dos termos independentes.

D_z - determinante da matriz incompleta do sistema, substituindo-se a coluna de z pela coluna dos termos independentes.

Dessa forma, para encontrar as incógnitas do sistema, primeiramente devemos calcular os determinantes D, D_x , D_y e D_z associado ao sistema.

Exemplos:

$$a) \quad \begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + 3y + 2z = 4 \\ 3x - 2y + z = -5 \end{cases}$$

Apêndice II - Lista de Exercícios sobre Regra de Cramer**LISTA DE EXERCÍCIOS**

1 - Resolvendo o sistema linear a seguir

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 4x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

podemos afirmar que o valor de z que satisfaz esse sistema é igual a:

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 5

2 - (IFPE) Com a proximidade do final do ano, uma papelaria quis antecipar as promoções de material didático para o ano letivo de 2012. Foram colocados em promoção caneta, caderno e lápis. As três ofertas eram:

- 1ª) 5 canetas, 4 cadernos e 10 lápis por R\$ 62,00;
- 2ª) 3 canetas, 5 cadernos e 3 lápis por R\$ 66,00;
- 3ª) 2 canetas, 3 cadernos e 7 lápis por R\$ 44,00.

Para comparar os preços unitários dessa papelaria com outras do comércio, o Sr. Ricardo calculou os preços de uma caneta, um caderno e um lápis. A soma desses preços é

- A) R\$ 20,00.
- B) R\$ 18,00.
- C) R\$ 16,00.
- D) R\$ 14,00.
- E) R\$ 12,00.

3 - (Fuvest–SP)

Carlos e sua irmã Andreia foram com seu cachorro Bidu à farmácia de seu avô. Lá encontraram uma velha balança com defeito, que só indicava corretamente pesos superiores a 60 kg. Assim, eles se pesaram dois a dois e obtiveram as seguintes marcas:

Carlos e o cão pesam juntos 87 kg;

Carlos e Andreia pesam 123 kg;

Andreia e Bidu pesam 66 kg.

Determine o peso de cada uma deles:

4 - Utilizando a Regra de Cramer, determine o valor da incógnita y no seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 3z = 18 \\ 3x + 2y + 5z = 23 \\ 5x + 4y + 2z = 27 \end{cases}$$

Plano de Aula Semanal nº 8

Acadêmico: Cássio Emanuel Oliveira

Professor(a) Orientador(a): Elizângela Weber

Unidade Concedente: Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia Farroupilha

Estágio – Turma/Nº de alunos: 2º ano - 33 alunos

Professor(a) Regente da Classe: Julhane Alice Thomas Schulz

Data/Horário: 08/10/2024 – 1 períodos - Das 9h10min às 10h

1 .Tema/Assunto:

Números e Álgebra - Sistemas lineares

2. Objetos de Conhecimento:

- Sistemas lineares 3 x 3 - Escalonamento.

3. Habilidades relativas a BNCC:

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

4 . Objetivos

- Compreender o método de escalonamento aplicado a sistemas lineares 3x3.
- Realizar operações entre linhas de uma matriz para obter a forma escalonada de um sistema.
- Resolver sistemas lineares 3x3 utilizando o processo de retro-substituição.
- Aplicar o escalonamento na resolução de exercícios.

5. Metodologia

Método expositivo e dialogado

6. Recursos

Materiais de uso comum: lápis, borracha, caderno, folhas, etc.

Materiais/recursos didáticos: material impresso.

7. Desenvolvimento

Incentivação:

No primeiro momento, será realizada a correção dos exercícios da aula anterior, a fim de verificar se os alunos compreenderam o método de resolução da regra de Cramer e se houve alguma dificuldade na realização dos exercícios.

Desenvolvimento da aula:

Atividade 1: Entregar um material impresso apresentando o método de resolução de Escalonamento para sistemas lineares 3 x 3 (Apêndice I).

Escalonamento

No método do escalonamento, ao contrário da Regra de Cramer, utilizamos a matriz completa do Sistema Linear. A partir dela, realizamos operações entre as linhas com o objetivo de isolar as suas incógnitas.

Exemplos:

$$a) \begin{cases} x + 2y - 3z = 10 \\ 2x + y + z = 3 \\ -3x + 2y + z = -6 \end{cases}$$

Solução:

1º - Vamos escrever a matriz completa do sistema. Temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 10 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Sejam L_1 , L_2 e L_3 respectivamente as linhas 1, 2 e 3 da matriz, vamos realizar operações entre L_1 e L_2 e L_1 e L_3 , de modo que o resultado faça com que os termos que estão na primeira coluna da segunda e da terceira linhas fiquem iguais a zero. Para a segunda linha da matriz, vamos substituí-la pelo resultado de $L_2 = -2 \cdot L_1 + L_2$. Assim, temos:

$$a_{21} = -2 \cdot 1 + 2 = 0$$

$$a_{22} = -2 \cdot 2 + 1 = -3$$

$$a_{23} = -2 \cdot (-3) + 1 = 7$$

$$a_{24} = -2 \cdot 10 + 3 = -17$$

$$L_2 = 0 \quad -3 \quad 7 \quad -17$$

Para a terceira linha da matriz, vamos substituí-la pelo resultado de $L_3 = 3 \cdot L_1 + L_3$.

Assim, temos:

$$a_{31} = 3 \cdot 1 + (-3) = 0$$

$$a_{32} = 3 \cdot 2 + 1 = 7$$

$$a_{33} = 3 \cdot (-3) + 1 = -8$$

$$a_{34} = 3 \cdot 10 + (-6) = 24$$

$$L_3 = 0 \quad 7 \quad -8 \quad 24$$

Como todos números da L_3 são divisíveis por 8, logo, para que a L_3 seja mais simplificada, vamos dividi-la por 8. Assim, temos:

$$L_3 = 0 \ 1 \ -1 \ 3$$

Assim, a nova matriz da equação escalonada será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 10 \\ 0 & -3 & 7 & -17 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Agora, o objetivo é zerar a coluna y na terceira linha. Faremos operações entre L_2 e L_3 . Vamos substituir L_3 pelo resultado obtido por $L_3 = L_2 + 3 \cdot L_3$.

$$\begin{aligned} a_{31} &= 0 + 3 \cdot 0 = 0 \\ a_{32} &= -3 + 3 \cdot 1 = 0 \\ a_{33} &= 7 + 3 \cdot (-1) = 4 \\ a_{34} &= -17 + 3 \cdot 3 = -8 \\ L_3 &= 0 \ 0 \ 4 \ -8 \end{aligned}$$

A nova matriz escalonada será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 10 \\ 0 & -3 & 7 & -17 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

Agora, ao representarmos essa matriz como um sistema novamente, adicionando x, y e z nas colunas, encontraremos o seguinte:

$$\begin{cases} 1x + 2y - 3z = 10 \\ 0x - 3y + 7z = -17 \\ 0x + 0y + 4z = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x + 2y - 3z = 10 \\ -3y + 7z = -17 \\ 4z = -8 \end{cases}$$

Podemos então encontrar o valor de cada uma das incógnitas, através do processo de retrossubstituição. Analisando a equação III, temos:

$$4z = -8 \Rightarrow z = \frac{-8}{4} \Rightarrow z = -2$$

Vamos substituir o valor de z na equação II. Temos:

$$-3y + 7z = -17 \Rightarrow -3y + 7(-2) = -17 \Rightarrow -3y = -3 \Rightarrow y = \frac{-3}{-3} \Rightarrow y = 1$$

Agora, vamos substituí-los na equação I. Temos:

$$x + 2y - 3z = 10 \Rightarrow x + 2(1) - 3(-2) = 10 \Rightarrow x + 8 = 10 \Rightarrow x = 2$$

Portanto, a solução do sistema é $S = \{2, 1, -2\}$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + 5y - z = 8 \\ x + 2y - z = 3 \\ 3x + 7y - 2z = 11 \end{cases}$$

1º - Vamos montar a matriz completa do sistema. Temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 7 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

Para facilitar, vamos trocar a linha 1 pela linha 2, pois o primeiro coeficiente da linha 2 é 1. Temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 8 \\ 3 & 7 & -2 & 11 \end{array} \right]$$

Para zerar os elementos da 1ª coluna na 2ª e 3ª linhas, vamos fazer as seguintes operações: $L_2 = -2 \cdot L_1 + L_2$ e $L_3 = -3 \cdot L_1 + L_3$.

Linha 2:

$$\begin{aligned} a_{21} &= -2 \cdot 1 + 2 = 0 \\ a_{22} &= -2 \cdot 2 + 5 = 1 \\ a_{23} &= -2 \cdot (-1) + (-1) = 1 \\ a_{24} &= -2 \cdot 3 + 8 = 2 \end{aligned}$$

Linha 3:

$$\begin{aligned} a_{31} &= -3 \cdot 1 + 3 = 0 \\ a_{32} &= -3 \cdot 2 + 7 = 1 \\ a_{33} &= -3 \cdot (-1) + (-2) = 1 \\ a_{34} &= -3 \cdot 3 + 11 = 2 \end{aligned}$$

Nova matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Agora, para zerar o elemento da 3ª linha e segunda coluna, vamos realizar a seguinte operação: $L_3 = -L_2 + L_3$.

Linha 3:

$$a_{31} = -1 \cdot 0 + 0 = 0$$

$$a_{32} = -1 \cdot 1 + 1 = 0$$

$$a_{33} = -1 \cdot 1 + 1 = 0$$

$$a_{34} = -1 \cdot 2 + 2 = 0$$

Nova matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Agora, vamos transpor a matriz para um sistema. Temos:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ y + z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Ao analisarmos o sistema, podemos perceber que a equação III resultou na sentença $0x + 0y + 0z = 0$. Esta sentença demonstra que para qualquer valor atribuído a x, y e z, a sentença permanece verdadeira. Podemos analisar também a partir da equação II, reorganizando a equação da seguinte maneira:

$$\text{II. } y + z = 2 \Rightarrow y = 2 - z$$

Podemos isolar a variável z, para que nas possíveis soluções seja substituída por um número real. Assim, temos:

$$y + z = 2 \Rightarrow y = 2 - z$$

Podemos substituir y e z na equação I. Temos:

$$\begin{aligned} x + 2(2 - z) - z &= 3 \Rightarrow x + 4 - 2z - z = 3 \Rightarrow x - 3z = -1 \\ &\Rightarrow x = 3z - 1 \end{aligned}$$

A solução geral é dada por $S = (3z - 1, 2 - z, z)$, com $z \in R$. Observe que todas as incógnitas são dependentes do valor de z . Portanto, estamos diante de um sistema possível e indeterminado (SPI), no qual existem infinitas soluções.

Sistematização/Fechamento da Aula:

Atividade 2: Entregar um material impresso (Apêndice II) com uma lista de exercícios sobre o método de escalonamento.

LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Resolva os seguintes sistemas lineares por escalonamento:

$$a) \begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - z = -2 \end{cases}$$

Solução:

Montar a matriz completa do sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right]$$

Agora, vamos fazer a primeira operação. Para zerar a 2ª linha, vamos substituí-la pelo resultado da seguinte equação $L_2 = -2 \cdot L_1 + L_2$. Para zerar a 3ª linha, vamos substituí-la pelo resultado da seguinte equação $L_3 = -L_1 + L_3$.

Linha 2:

$$\begin{aligned} a_{21} &= -2 \cdot 1 + 2 = 0 \\ a_{22} &= -2 \cdot 2 + (-1) = -5 \\ a_{23} &= -2 \cdot 3 + 1 = -5 \\ a_{24} &= -2 \cdot 14 + 3 = -25 \end{aligned}$$

Linha 3:

$$\begin{aligned} a_{31} &= -1 \cdot 1 + 1 = 0 \\ a_{32} &= -1 \cdot 2 + 0 = -2 \\ a_{33} &= -1 \cdot 3 + (-1) = -4 \\ a_{34} &= -1 \cdot 14 + (-2) = -16 \end{aligned}$$

Nova matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -5 & -25 \\ 0 & -2 & -4 & -16 \end{array} \right]$$

Agora, vamos zerar o elemento da 3ª linha e 2ª coluna. Vamos substituir a 3ª linha pelo resultado da seguinte equação $L_3 = -\frac{2}{5} \cdot L_2 + L_3$.

Linha 3:

$$\begin{aligned} a_{31} &= -\frac{2}{5} \cdot 0 + 0 = 0 \\ a_{32} &= -\frac{2}{5} \cdot (-5) + (-2) = 0 \\ a_{33} &= -\frac{2}{5} \cdot (-5) + (-4) = -2 \\ a_{34} &= -\frac{2}{5} \cdot (-25) + (-16) = -6 \end{aligned}$$

Nova matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -5 & -25 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array} \right]$$

Transpondo para o sistema linear, temos:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ -5y - 5z = -25 \\ -2z = -6 \end{cases}$$

Agora, vamos aplicar o processo de retrossubstituição. Na equação III, temos:

$$-2z = -6 \Rightarrow z = \frac{-6}{-2} \Rightarrow z = 3$$

Vamos substituir o valor de z na equação II. Temos:

$$-5y - 5(3) = -25 \Rightarrow -5y = -25 + 15 \Rightarrow y = \frac{-10}{-5} \Rightarrow y = 2$$

Vamos substituir o valor de y e z na equação I. Temos:

$$x + 2(2) + 3(3) = 14 \Rightarrow x = 14 - 4 - 9 \Rightarrow x = 1$$

Portanto a solução do sistema é dada por $S = (1, 2, 3)$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 3y + z = 9 \\ 3x + 4y + 2z = 13 \end{cases}$$

Solução:

Montar a matriz completa do sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \\ 3 & 4 & 2 & 13 \end{array} \right]$$

Agora, vamos substituir a 2ª linha pelo resultado da seguinte equação

$L_2 = -2 \cdot L_1 + L_2$, e substituir a 3ª linha pelo resultado da seguinte equação

$L_3 = -3 \cdot L_1 + L_3$.

Linha 2:

$$a_{21} = -2 \cdot 1 + 2 = 0$$

$$a_{22} = -2 \cdot 1 + 3 = 1$$

$$a_{23} = -2 \cdot 1 + 1 = -1$$

$$a_{24} = -2 \cdot 4 + 9 = 1$$

Linha 3:

$$a_{31} = -3 \cdot 1 + 3 = 0$$

$$a_{32} = -3 \cdot 1 + 4 = 1$$

$$a_{33} = -3 \cdot 1 + 2 = -1$$

$$a_{34} = -3 \cdot 4 + 13 = 1$$

Nova matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

Agora, vamos zerar o elemento da 3ª linha e 2ª coluna, a partir do resultado da seguinte equação $L_3 = -L_2 + L_3$.

Linha 3:

$$a_{31} = -1 \cdot 0 + 0 = 0$$

$$a_{32} = -1 \cdot 1 + 1 = 0$$

$$a_{33} = -1 \cdot (-1) + (-1) = 0$$

$$a_{34} = -1 \cdot 1 + 1 = 0$$

Nova matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Agora transpomos a matriz para o sistema. Temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ y - z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Vamos agora utilizar a retrossubstituição. Analisando a equação III, temos $0 = 0$. Como não obtivemos nenhuma informação sobre as incógnitas, vamos analisar a equação II, reorganizando, temos:

$$y - z = 1 \Rightarrow y = 1 + z, \text{ com } z \in R$$

Vamos substituir as incógnitas na equação I. Temos:

$$x + (1 + z) + z = 4 \Rightarrow x = 3 - 2z$$

A solução geral é dada por $S = (3 - 2z, 1 + z, z)$, com $z \in R$. Podemos notar que as incógnitas são dependentes do valor de z , isto é, podemos atribuir quaisquer valores para z . Portanto, estamos diante de um sistema possível e indeterminado (SPI), no qual existem infinitas soluções.

$$c) \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 5y - z = 8 \\ 3x + 7y - 2z = 12 \end{cases}$$

Solução:

Montar a matriz completa do sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 8 \\ 3 & 7 & -2 & 12 \end{array} \right]$$

Vamos substituir a linha 2 pelo resultado da seguinte equação $L_2 = -2 \cdot L_1 + L_2$, e substituir a linha 3 pelo resultado da seguinte equação $L_3 = -3 \cdot L_1 + L_3$.

Linha 2:

$$\begin{aligned}a_{21} &= -2 \cdot 1 + 2 = 0 \\a_{22} &= -2 \cdot 2 + 5 = 1 \\a_{23} &= -2 \cdot (-1) + (-1) = 1 \\a_{24} &= -2 \cdot 3 + 8 = 2\end{aligned}$$

Linha 3:

$$\begin{aligned}a_{31} &= -3 \cdot 1 + 3 = 0 \\a_{32} &= -3 \cdot 2 + 7 = 1 \\a_{33} &= -3 \cdot (-1) + (-2) = 1 \\a_{34} &= -3 \cdot 3 + 12 = 3\end{aligned}$$

Nova matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Agora, vamos substituir o elemento da 3ª linha e segunda coluna pelo resultado da seguinte equação $L_3 = -L_2 + L_3$.

Linha 3:

$$\begin{aligned}a_{31} &= -0 + 0 = 0 \\a_{32} &= -1 + 1 = 0 \\a_{33} &= -1 + 1 = 0 \\a_{34} &= -2 + 3 = 1\end{aligned}$$

Nova matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Agora, vamos transpor a matriz para o sistema linear.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -3y + z = -4 \\ 3z = -3 \end{cases}$$

Vamos fazer o processo de retrosubstituição. Analisando a equação III, temos:

$$3z = -3 \Rightarrow z = -\frac{3}{3} \Rightarrow z = -1$$

Vamos substituir z na equação II. Temos:

$$-3y + (-1) = -4 \Rightarrow -3y = -3 \Rightarrow y = \frac{-3}{-3} \Rightarrow y = 1$$

Vamos substituir y e z na equação I. Temos:

$$x + 1 + (-1) = 4 \Rightarrow x = 4$$

Portanto, a solução do sistema é dada por $S = (4, 1, -1)$

2) Um teatro vende três tipos de ingressos para um espetáculo: **inteiro**, **meia-entrada** e **promocional**.

Durante três dias de venda antecipada, foram registrados os seguintes dados:

- **1º dia:** foram vendidos 8 ingressos inteiros, 7 meias-entradas e 5 promocionais, totalizando R\$ 400,00;
- **2º dia:** foram vendidos 16 ingressos inteiros, 10 meias-entradas e 4 promocionais, totalizando R\$ 620,00;
- **3º dia:** foram vendidos 10 ingressos inteiros, 8 meias-entradas e 7 promocionais, totalizando R\$ 505,00.

Com base nessas informações, determine o preço de cada tipo de ingresso.

Solução:

Primeiramente, vamos definir as variáveis adotando x para ingressos inteiros, y para meias-entradas e z para promocionais. Temos as equações:

- 1º dia: $8x + 7y + 5z = 400$
- 2º dia: $16x + 10y + 4z = 620$
- 3º dia: $10x + 8y + 7z = 505$

Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} 8x + 7y + 5z = 400 \\ 16x + 10y + 4z = 620 \\ 10x + 8y + 7z = 505 \end{cases}$$

Vamos montar a matriz do sistema. Temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 7 & 5 & 400 \\ 16 & 10 & 4 & 620 \\ 10 & 8 & 7 & 505 \end{array} \right]$$

Para zerar a 1ª coluna na 2ª e 3ª linhas, vamos fazer as seguintes operações:

$$L_2 = -2 \cdot L_1 + L_2 \text{ e } L_3 = -\frac{10}{8} \cdot L_1 + L_3 = -\frac{5}{4} \cdot L_1 + L_3.$$

Linha 2:

$$\begin{aligned} a_{21} &= -2 \cdot 8 + 16 = 0 \\ a_{22} &= -2 \cdot 7 + 10 = -4 \\ a_{23} &= -2 \cdot 5 + 4 = -6 \\ a_{24} &= -2 \cdot 400 + 620 = -180 \end{aligned}$$

Linha 3:

$$\begin{aligned} a_{31} &= -\frac{5}{4} \cdot 8 + 10 = 0 \\ a_{32} &= -\frac{5}{4} \cdot 7 + 8 = -\frac{3}{4} \\ a_{33} &= -\frac{5}{4} \cdot 5 + 7 = \frac{3}{4} \\ a_{34} &= -\frac{5}{4} \cdot 400 + 505 = 5 \end{aligned}$$

Nova matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 7 & 5 & 400 \\ 0 & -4 & -6 & -180 \\ 0 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 5 \end{array} \right]$$

Agora, para zerar o elemento da 2ª coluna e 3ª linha, vamos realizar a seguinte operação: $L_3 = -\frac{3}{16} \cdot L_2 + L_3$.

Linha 3:

$$\begin{aligned} a_{31} &= -\frac{3}{16} \cdot 0 + 0 = 0 \\ a_{32} &= -\frac{3}{16} \cdot (-4) + \left(-\frac{3}{4}\right) = 0 \\ a_{33} &= -\frac{3}{16} \cdot (-6) + \frac{3}{4} = \frac{15}{8} \\ a_{34} &= -\frac{3}{16} \cdot (-180) + 5 = \frac{155}{4} \end{aligned}$$

Nova matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 7 & 5 & 400 \\ 0 & -4 & -6 & -180 \\ 0 & 0 & \frac{15}{8} & \frac{155}{4} \end{array} \right]$$

Agora, vamos transpor para um sistema. Temos:

$$\begin{cases} 8x + 7y + 5z = 400 \\ -4y - 6z = -180 \\ \frac{15}{8}z = \frac{155}{4} \end{cases}$$

Analisando a equação III, temos:

$$\frac{15}{8}z = \frac{155}{4} \Rightarrow z = \frac{\frac{155}{4}}{\frac{15}{8}} \Rightarrow z = \frac{155}{4} \cdot \frac{8}{15} \Rightarrow z = \frac{310}{15} = \frac{62}{3} \approx 20,67$$

Vamos substituir z na equação II. Temos:

$$-4y - 6\left(\frac{62}{3}\right) = -180 \Rightarrow -4y = -180 + 124 \Rightarrow y = \frac{-56}{-4} \Rightarrow y = 14$$

Vamos substituí-los na equação I. Temos:

$$8x + 7(14) + 5\left(\frac{62}{3}\right) = 400 \Rightarrow 8x = 400 - 98 - \frac{310}{3} \Rightarrow 8x = \frac{596}{3} \Rightarrow x = \frac{596}{24} \approx 24,83$$

Portanto, os valores dos ingressos são:

- inteiro: R\$ 24,83;
- meia-entrada: R\$ 14,00;
- promocional: R\$ 20,67.

8. Avaliação

A avaliação ocorrerá de forma contínua durante a aula, por meio da observação da participação dos alunos nas correções, das dúvidas apresentadas e da execução das atividades propostas. Serão considerados o empenho e a compreensão do método de escalonamento, bem como a capacidade de aplicar corretamente as operações entre linhas e realizar a retrossubstituição para encontrar as soluções dos sistemas. A lista de exercícios servirá como instrumento principal para verificar a aprendizagem e identificar possíveis dificuldades no processo de resolução.

9. Bibliografias

ANDRADE, Thaís M. de. **Matemática Interligada**: Matrizes, sistemas lineares e Geometria analítica. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

DANTE, Luiz R. **Matemática: Contexto & Aplicações** - 2º ano: Ensino Médio. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

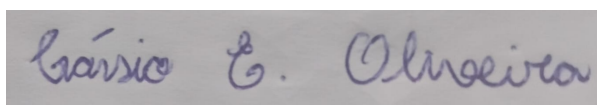
LEONARDO, Fábio M. de. **Conexões: Matemática e suas tecnologias** - Matrizes e Geometria analítica. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2020.

NOÉ, Marcos. **Exercícios sobre Regra de Cramer**. Brasil Escola. Disponível em: <<https://exercicios.brasilecola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-regra-cramer.htm>>. Acesso em: 4 out. 2025.

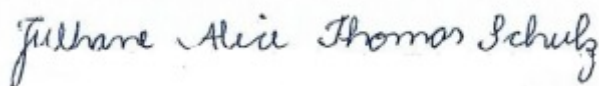
RODRIGUES, Raul. **Sistemas lineares: o que são, como resolver, tipos**. Brasil Escola. Disponível em: <<https://brasilecola.uol.com.br/matematica/sistemas-lineares.htm>>. Acesso em: 4 out. 2025.

10. Observações

Na aula de escalonamento, os alunos demonstraram grande interesse em aprender o método e participaram ativamente na escolha das operações elementares. A transição do sistema para a matriz ampliada ocorreu com naturalidade e contribuiu para a compreensão da técnica. As discussões sobre qual operação aplicar promoveram um ambiente de colaboração e pensamento crítico. Alguns estudantes ainda apresentaram dúvidas pontuais, mas conseguiram avançar com apoio dialogado. O envolvimento foi alto e o aprendizado mostrou-se significativo.



Cássio Emanuel Oliveira
Aluno – Estagiário



Julhane Alice Thomas Schulz
Supervisor – Parte Concedente

A handwritten signature in black ink on a light gray rectangular background. The signature reads "Elizangela Weber." in a cursive script.

Elizangela Weber
Professor Orientador – Entidade Educacional

Apêndice I - Escalonamento

Escalonamento

No método do escalonamento, ao contrário da Regra de Cramer, utilizamos a matriz completa do sistema linear. A partir dela, realizamos operações entre as linhas com o objetivo de isolar as suas incógnitas.

Exemplos:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y - 3z = 10 \\ 2x + y + z = 3 \\ -3x + 2y + z = -6 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + 5y - z = 8 \\ x + 2y - z = 3 \\ 3x + 7y - 2z = 11 \end{cases}$$

Apêndice II - Lista de exercícios: Escalonamento

LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Resolva os seguintes sistemas lineares por escalonamento:

a)
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - z = -2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 3y + z = 9 \\ 3x + 4y + 2z = 13 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ -x + 2y + z = -3 \end{cases}$$

2) Um teatro vende três tipos de ingressos para um espetáculo: **inteiro**, **meia-entrada** e **promocional**.

Durante três dias de venda antecipada, foram registrados os seguintes dados:

- **1º dia:** foram vendidos 8 ingressos inteiros, 7 meias-entradas e 5 promocionais, totalizando R\$ 400,00;
- **2º dia:** foram vendidos 16 ingressos inteiros, 10 meias-entradas e 4 promocionais, totalizando R\$ 620,00;
- **3º dia:** foram vendidos 10 ingressos inteiros, 8 meias-entradas e 7 promocionais, totalizando R\$ 505,00.

Com base nessas informações, determine o preço de cada tipo de ingresso.

Plano de Aula Semanal nº 9

Acadêmico: Cássio Emanuel Oliveira

Professor(a) Orientador(a): Elizangela Weber

Unidade Concedente: Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia Farroupilha

Estágio – Turma/Nº de alunos: 2º ano - 33 alunos

Professor(a) Regente da Classe: Julhane Alice Thomas Schulz

Data/Horário: 16/10/2024 – 2 períodos - 13h 30min as 15h

1 .Tema/Assunto:

Números e Álgebra - Matrizes, Determinantes e Sistemas lineares

2. Objetos de Conhecimento:;

- Trabalho avaliativo;

3. Habilidades relativas a BNCC:

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

4 . Objetivos

- Revisar e consolidar os conceitos fundamentais de matrizes e determinantes.
- Revisar conceitos e métodos de resolução de sistemas lineares, identificando suas classificações e aplicando técnicas como substituição, escalonamento e regra de Cramer para solucionar problemas.
- Aplicar corretamente os métodos de resolução de sistemas lineares 2×2 e 3×3 através de problemas contextualizados.
- Resolver problemas práticos que exigem a modelagem e a solução de sistemas lineares utilizando as técnicas estudadas.

5. Metodologia

Prova e Trabalho Avaliativo

6. Recursos

Materiais de uso comum: lápis, borracha, caderno, folhas, etc.

Materiais/recursos didáticos: material impresso.

7. Desenvolvimento

Incentivação:

No primeiro momento, será realizada a correção dos exercícios das semanas anteriores, relacionados aos métodos de resolução de sistemas lineares 3×3 : Regra de Cramer e Escalonamento.

Desenvolvimento da aula:

Atividade 1: Nesta atividade, será desenvolvido um trabalho avaliativo em duplas, com consulta aos registros do caderno. O trabalho será composto por questões que abordam todo o conteúdo de matrizes, determinantes e sistemas lineares. Este trabalho terá peso 7.

TRABALHO AVALIATIVO

1) (Fatec - SP) Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem 2 tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 2^{i+j} & \text{para } i < j \\ i^2 + 1 & \text{para } i \geq j \end{cases}. \text{ Nessas condições:}$$

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Solução:

O enunciado traz uma matriz de ordem 2 x 2, então podemos determinar sua forma genérica:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Agora, vamos determinar os elementos a partir da lei de formação dada:

$$a_{11} = 1^2 + 1 = 2$$

$$a_{12} = 2^{1+2} = 2^3 = 8$$

$$a_{21} = 2^2 + 1 = 5$$

$$a_{22} = 2^2 + 1 = 5$$

Portanto, a matriz a é:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

2) (UEG - 2025) Na 11ª rodada do Campeonato Goiano de Futebol do ano 2025, o número de vitórias (V), empates (E) e derrotas (D) dos três primeiros colocados é dado pelo quadro apresentado abaixo.

Clube	V	E	D
Anápolis	7	2	2
Atlético - GO	5	4	2
Vila Nova	6	4	1

Sabendo que a pontuação por vitórias, empates e derrotas, nesta ordem, é dada

pela matriz $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, a pontuação dos times, em ordem decrescente de pontuação, é:

- (a) 18, 10, 5
- (b) 27, 10, 7
- (c) 29, 29, 25
- (d) 23, 22, 19**
- (e) 30, 27, 27

Solução:

Primeiramente, vamos transpor os dados da tabela para uma matriz. Temos:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, vamos multiplicar essa matriz pela matriz com a pontuação por vitória, empate e derrota, buscando saber a pontuação obtida por cada equipe. Assim, temos:

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Anápolis: } 7 \times 3 + 2 \times 1 + 2 \times 0 = 21 + 2 + 0 = 23$$

$$\text{Atlético - Go: } 5 \times 3 + 4 \times 1 + 2 \times 0 = 15 + 4 + 0 = 19$$

$$\text{Vila nova: } 6 \times 3 + 4 \times 1 + 1 \times 0 = 18 + 4 + 0 = 22$$

Como a questão pede ordem decrescente, então temos: 23, 22, 19.

3) (UFES - modificada) Os valores de x e y que satisfazem a equação matricial

$$\begin{pmatrix} x & -2 \\ 4 & 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y & 7 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ são:}$$

- (a) $x = 1$ e $y = 1$
- (b) $x = -1$ e $y = -1$
- (c) $x = 2$ e $y = 1$**

(d) $x = 2$ e $y = -1$

Solução:

Vamos somar e igualar os termos correspondentes nas matrizes. Então, obtemos as seguintes equações:

$$\text{I. } x + 2y = 4$$

$$\text{II. } 2x + 1 = 5$$

Ao analisar a equação II, podemos obter o valor de x :

$$2x + 1 = 5 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} \Rightarrow x = 2$$

Substituindo x na equação I, temos:

$$x + 2y = 4 \Rightarrow 2 + 2y = 4 \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{2} \Rightarrow y = 1$$

Portanto, $x = 2$ e $y = 1$.

4) Uma pequena empresa de artesanato que opera em três canais de venda – Loja Física (Canal 1), Loja Online (Canal 2) e Feiras de Artesanato (Canal 3) – registrou seus dados de desempenho no último trimestre. Os dados são organizados em matrizes 3×2 , onde as linhas representam os canais de venda ($i=1,2,3$) e as colunas representam os meses do trimestre (Mês 1 e Mês 2).

A Matriz V registra o valor total das vendas brutas (em milhares de Reais) para cada canal em cada mês:

Canal i	Mês 1 ($j = 1$)	Mês 2 ($j = 2$)
Loja Física (1)	12	15
Loja Online (2)	8	10
Feiras (3)	5	7

A Matriz C registra os custos operacionais (em milhares de Reais) incorridos por cada canal em cada mês:

Canal i	Mês 1 ($j = 1$)	Mês 2 ($j = 2$)
Loja Física (1)	3	4
Loja Online (2)	2	3
Feiras (3)	1	2

a) Construa a Matriz L (Lucro Bruto), sabendo que o lucro bruto é dado pela diferença entre as Vendas Brutas e os Custos Operacionais, ou seja: $L=V-C$

Solução:

Primeiramente, vamos construir as matrizes V e C. Temos:

$$V = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 8 & 10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Agora, podemos encontrar a matriz L utilizando a equação dada. Temos:

$$L = V - C = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 8 & 10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 12 - 3 & 15 - 4 \\ 8 - 2 & 10 - 3 \\ 5 - 1 & 7 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ 6 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

b) Qual foi o lucro total (em Reais) obtido pela empresa no Mês 2?

Solução:

Vamos calcular baseado na segunda coluna da matriz de lucros, que representa o mês 2. Temos:

$$L_{\text{mês } 2} = 11 + 7 + 5 = 23$$

Portanto, o lucro total no mês 2 foi de R\$ 23.000,00.

5) Se $\mathbf{a} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 10 \end{vmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$, calcule o valor de $a^2 + 3b - 2c$.

Solução:

Vamos calcular os determinantes de cada matriz:

$$\begin{aligned} a &= 1 \times 5 - 3 \times (-2) = 5 + 6 = 11 \\ b &= 2 \times 10 - 6 \times 3 = 20 - 18 = 2 \\ c &= 2 \times (-1) - 8 \times 0 = -2 - 0 = -2 \end{aligned}$$

Agora, vamos substituir os determinantes na equação. Temos:

$$a^2 + 3b - 2c = 11^2 + 3 \times 2 - 2 \times (-2) = 121 + 6 + 4 = 131$$

6) (UEPA - 2001) A matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ é tal que determinante dessa matriz vale:

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{i+j}{2}, & i \geq j \\ i - j, & i < j \end{cases} . \text{ O}$$

Solução:

Temos a matriz genérica de ordem 3 x 3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Vamos determinar o valor de cada elemento a partir da lei de formação. Temos:

$$a_{11} = \frac{1+1}{2} = 1 \quad a_{12} = 1 - 2 = -1 \quad a_{13} = 1 - 3 = -2$$

$$a_{21} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \quad a_{22} = \frac{2+2}{2} = 2 \quad a_{23} = 2 - 3 = -1$$

$$a_{31} = \frac{3+1}{2} = 2 \quad a_{32} = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2} \quad a_{33} = \frac{3+3}{2} = 3$$

A matriz obtida é:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3/2 & 2 & -1 \\ 2 & 5/2 & 3 \end{pmatrix}$$

Agora, vamos calcular o determinante da matriz obtida. Temos:

$$\det A = 1 \cdot 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} - (-2) \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \cdot \frac{5}{2} - (-1) \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 \Rightarrow$$

$$\det A = 6 + 2 - \frac{15}{2} + 8 + \frac{5}{2} + \frac{9}{2} = 16 - \frac{1}{2} = \frac{31}{2} \text{ ou } 15,5$$

7) (UEMG - 2019) No plano, o sistema $\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ 4x - 6y = 12 \end{cases}$ é representado por um par de retas

(a) coincidentes

(b) distintas e paralelas

(c) retas concorrentes no ponto (1, -4/3)

(d) retas concorrentes no ponto (5/3, -16/9)

Solução:

Vamos multiplicar a equação I por -2. Temos:

$$\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ 4x - 6y = 12 \end{cases} \xrightarrow{\times (-2)} \begin{cases} -4x - 6y = 4 \\ 4x - 6y = 12 \end{cases} \Rightarrow -12y = 16 \Rightarrow y = -\frac{16}{12} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}$$

Substituindo y na equação I, temos:

$$2x + 3\left(-\frac{4}{3}\right) = -2 \Rightarrow 2x - 4 = -2 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{2} \Rightarrow x = 1$$

Portanto, a solução do sistema é dada por $S = (1, -\frac{4}{3})$. Como o sistema possui uma única solução, estamos diante de um sistema possível e determinado (SPD). Se fôssemos transpor para um gráfico no plano, teríamos duas retas concorrentes que se interceptam no ponto $(1, -4/3)$ que é a solução do sistema linear.

8) (URCA - 2022) Considere o sistema linear
$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1. \end{cases}$$
 . O conjunto S formado pelas soluções (x, y, z) do sistema acima é dado por (Obs: utilize a regra de Cramer):

(a) $S = (1, 1, -1)$

(b) $S = (0, 1/6, 1/6)$

(c) $S = (-1/5, 0, 2/5)$

(d) $S = (1/4, 1/2, 0)$

Solução:

Vamos montar a matriz incompleta do sistema. Temos:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular o determinante D. Temos:

$$D = 3 \cdot (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow \\ D = -9 + 2 + 16 + 4 - 6 - 12 = -5$$

Vamos montar a matriz D_x :

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Calculando D_x , temos:

$$D_x = 1 \cdot (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 0 \cdot 3 \Rightarrow \\ D_x = -3 + 2 + 0 + 4 - 2 - 0 = 1$$

Vamos montar a matriz D_y :

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Calculando D_y , temos:

$$D_y = 3 \cdot 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 1 - 4 \cdot 0 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow \\ D_y = 0 + 1 + 8 - 0 - 3 - 6 = 0$$

Vamos montar a matriz D_z :

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Calculando D_z , temos:

$$D_z = 3 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 3 \cdot 0 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow \\ D_z = -3 + 0 + 4 + 1 - 0 - 4 = -2$$

Agora, vamos calcular x, y e z. Temos:

$$x = -\frac{1}{5} \quad y = -\frac{0}{5} = 0 \quad z = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$$

A solução é dada por $S = (-1/5, 0, -4/5)$

9) A partir de 31 de janeiro de 2020, as novas placas de automóveis padrão MERCOSUL começaram a ser usadas em todo o Brasil. As principais diferenças nas novas placas em relação às antigas são o aumento de 3 para 4 letras na inscrição e a redução de 4 para 3 algarismos indo-arábicos, conforme exemplo apresentado na figura apresentada.



Considerando que as novas placas têm formato retangular com dimensões 40 cm × 13 cm, julgue o item a seguir.

Se os três números $\{x, y, z\}$ presentes em determinada placa satisfizerem o sistema seguinte, então $x + y + z = 14$ (Obs: Utilize o método de escalonamento).

$$\begin{cases} 2x - y + z = 6 \\ x + 3y - z = 10 \\ -5x + y + z = 2 \end{cases}$$

(a) verdadeiro

(b) falso

Solução:

Vamos montar a matriz completa do sistema. Temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & -1 & 10 \\ -5 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Vamos trocar as linhas 1 e 2 para ficar com o primeiro elemento com valor 1. Temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 10 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \\ -5 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Vamos zerar a 1ª coluna na 2ª e 3ª linhas utilizando as seguintes equações:

$$L_2 = -2 \cdot L_1 + L_2 \text{ e } L_3 = 5 \cdot L_1 + L_3.$$

Linha 2:

$$\begin{aligned} a_{21} &= -2 \cdot 1 + 2 = 0 \\ a_{22} &= -2 \cdot 3 + (-1) = -7 \\ a_{23} &= -2 \cdot (-1) + 1 = 3 \\ a_{24} &= -2 \cdot 10 + 6 = -14 \end{aligned}$$

Linha 3:

$$\begin{aligned} a_{31} &= 5 \cdot 1 + (-5) = 0 \\ a_{32} &= 5 \cdot 3 + 1 = 16 \\ a_{33} &= 5 \cdot (-1) + 1 = -4 \\ a_{34} &= 5 \cdot 10 + 2 = 52 \end{aligned}$$

Nova matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & -7 & 3 & -14 \\ 0 & 16 & -4 & 52 \end{array} \right]$$

Vamos zerar a 2ª coluna na 3ª linha utilizando a seguinte equação: $L_3 = \frac{16}{7} \cdot L_2 + L_3$

Linha 3:

$$\begin{aligned} a_{31} &= \frac{16}{7} \cdot 0 + 0 = 0 \\ a_{32} &= \frac{16}{7} \cdot (-7) + 16 = 0 \\ a_{33} &= \frac{16}{7} \cdot 3 + (-4) = \frac{20}{7} \end{aligned}$$

$$a_{34} = \frac{16}{7} \cdot (-14) + 52 = 20$$

Nova matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & -7 & 3 & -14 \\ 0 & 0 & \frac{20}{7} & 20 \end{array} \right]$$

Vamos transpor para uma matriz:

$$\begin{cases} x + 3y - z = 10, \\ -7y + 3z = -14, \\ \frac{20}{7}z = 20. \end{cases}$$

Analisando a equação III, temos:

$$\frac{20}{7}z = 20 \Rightarrow 20z = 140 \Rightarrow z = \frac{140}{20} \Rightarrow z = 7$$

Substituindo z na equação II, temos:

$$-7y + 3(7) = -14 \Rightarrow -7y = -35 \Rightarrow y = \frac{-35}{-7} \Rightarrow y = 5$$

Substituindo y e z na equação I, temos:

$$x + 3(5) - 7 = 10 \Rightarrow x = 10 - 8 \Rightarrow x = 2$$

Agora vamos verificar a soma das incógnitas:

$$x + y + z = 2 + 5 + 7 = 14$$

Portanto, é verdadeira a equação.

Sistematização/Fechamento da Aula:

8. Avaliação

O processo de avaliação será composto por um instrumento formal: um Trabalho Avaliativo nos Objetos de Conhecimento de Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares.

O Trabalho Avaliativo será realizado em duplas, permitindo que os alunos colaborem e discutam as resoluções, com consulta liberada aos registros de seu caderno. Este trabalho terá um peso significativo, sendo atribuído o valor **7** (sete) na composição da nota. O objetivo é avaliar a capacidade de modelagem e resolução de problemas contextualizados que envolvem o conteúdo estudado.

A avaliação também será apoiada pela observação da participação e da correção detalhada dos exercícios das semanas anteriores, garantindo que o aprendizado e a fixação dos métodos sejam verificados antes das avaliações formais.

9. Bibliografias

ANDRADE, Thaís M. de. **Matemática Interligada: Matrizes, sistemas lineares e Geometria analítica**. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020.

ASTH, Rafael C. Exercícios de Matrizes (com questões resolvidas e explicadas). Toda Matéria. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/matrizes-exercicios/>. Acesso em: 12 out. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

DANTE, Luiz R. **Matemática: Contexto & Aplicações** - 2º ano: Ensino Médio. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

JR, Gilberto Santos. **Apostila de Matrizes** (10 páginas, 65 questões, com gabarito).pdf. Google Docs. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1if8xG18kwi3UvywyY8m7o8MuY3SPvuWu/view?pli=1>. Acesso em: 12 out. 2025.

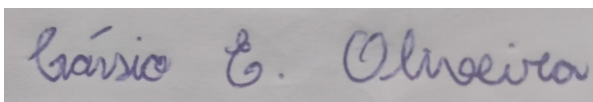
LEONARDO, Fábio M. de. **Conexões: Matemática e suas tecnologias** - Matrizes e Geometria analítica. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2020.

QUESTÕES Vestibular de Matemática - **Sistemas Lineares**, 2025. Disponível em: <https://www.qconcursos.com/questoes-de-vestibular/disciplinas/matematica-matematica/sistemas-lineares/questoes?page=3>. Acesso em: 12 out. 2025.

RODRIGUES, Raul. **Exercícios sobre matriz**. Exercícios Mundo Educação. Disponível em: <https://exercicios.mundoeducacao.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-matriz.htm>. Acesso em: 12 out. 2025.

10. Observações

Durante a realização do trabalho avaliativo em duplas, observou-se que a revisão prévia foi essencial para a segurança dos alunos. A maioria demonstrou domínio satisfatório dos conteúdos, embora alguns erros recorrentes tenham surgido, especialmente na distinção entre matrizes e determinantes. Os estudantes trabalharam com seriedade e solicitaram auxílio principalmente para organização dos cálculos. O desempenho geral foi positivo, e a atividade permitiu identificar pontos que ainda necessitam reforço. Houve comprometimento e postura adequada durante toda a aula.



Cássio Emanuel Oliveira
Aluno – Estagiário



Julhane Alice Thomas Schulz
Supervisor – Parte Concedente



Elizangela Weber
Professor Orientador – Entidade Educacional

Apêndice I - Trabalho Avaliativo

TRABALHO AVALIATIVO

1) (Fatec - SP) Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem 2 tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 2^{i+j} & \text{para } i < j \\ i^2 + 1 & \text{para } i \geq j \end{cases}.$$

Nessas condições:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

2) (UEG - 2025) Na 11ª rodada do Campeonato Goiano de Futebol do ano 2025, o número de vitórias (V), empates (E) e derrotas (D) dos três primeiros colocados é dado pelo quadro apresentado abaixo.

Clube	V	E	D
Anápolis	7	2	2
Atlético - GO	5	4	2
Vila Nova	6	4	1

Sabendo que a pontuação por vitórias, empates e derrotas, nesta ordem, é dada

pela matriz $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, a pontuação dos times, em ordem decrescente de pontuação, é:

(a) 18, 10, 5

(b) 27, 10, 7

(c) 29, 29, 25

(d) 23, 22, 19

(e) 30, 27, 27

3) (UFES - modificada) Os valores de x e y que satisfazem a equação matricial

$$\begin{pmatrix} x & -2 \\ 4 & 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y & 7 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ são:}$$

(a) $x = 1$ e $y = 1$

(b) $x = -1$ e $y = -1$

(c) $x = 2$ e $y = 1$

(d) $x = 2$ e $y = -1$

4) Uma pequena empresa de artesanato que opera em três canais de venda – Loja Física (Canal 1), Loja Online (Canal 2) e Feiras de Artesanato (Canal 3) – registrou seus dados de desempenho no último trimestre. Os dados são organizados em matrizes 3×2 , onde as linhas representam os canais de venda ($i=1,2,3$) e as colunas representam os meses do trimestre (Mês 1 e Mês 2).

A Matriz V registra o valor total das vendas brutas (em milhares de Reais) para cada canal em cada mês:

Canal i	Mês 1 ($j = 1$)	Mês 2 ($j = 2$)
Loja Física (1)	12	15
Loja Online (2)	8	10
Feiras (3)	5	7

A Matriz C registra os custos operacionais (em milhares de Reais) incorridos por cada canal em cada mês:

Canal i	Mês 1 ($j = 1$)	Mês 2 ($j = 2$)
Loja Física (1)	3	4
Loja Online (2)	2	3
Feiras (3)	1	2

a) Construa a Matriz L (Lucro Bruto), sabendo que o lucro bruto é dado pela diferença entre as Vendas Brutas e os Custos Operacionais, ou seja: $L=V-C$

b) Qual foi o lucro total (em Reais) obtido pela empresa no Mês 2?

5) Se $\mathbf{a} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 10 \end{vmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$, calcule o valor de $a^2 + 3b - 2c$.

6) (UEPA - 2001) A matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ é tal que $a_{ij} = \begin{cases} \frac{i+j}{2}, & i \geq j \\ i - j, & i < j \end{cases}$. O determinante dessa matriz vale:

7) (UEMG - 2019) No plano, o sistema $\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ 4x - 6y = 12 \end{cases}$ é representado por um par de retas

- (a) coincidentes
- (b) distintas e paralelas
- (c) retas concorrentes no ponto $(1, -4/3)$
- (d) retas concorrentes no ponto $(5/3, -16/9)$

conjunto S formado pelas soluções (x, y, z) do sistema acima é dado por (Obs: utilize a regra de Cramer):

- (a) $S = (1, 1, -1)$
- (b) $S = (0, 1/6, 1/6)$
- (c) $S = (-1/5, 0, 2/5)$
- (d) $S = (1/4, 1/2, 0)$

9) A partir de 31 de janeiro de 2020, as novas placas de automóveis padrão MERCOSUL começaram a ser usadas em todo o Brasil. As principais diferenças nas novas placas em relação às antigas são o aumento de 3 para 4 letras na inscrição e a redução de 4 para 3 algarismos indo-arábicos, conforme exemplo apresentado na figura apresentada.



Considerando que as novas placas têm formato retangular com dimensões 40 cm × 13 cm, julgue o item a seguir.

Se os três números $\{x, y, z\}$ presentes em determinada placa satisfizerem o sistema seguinte, então $x + y + z = 14$ (Obs: Utilize o método de escalonamento).

$$\begin{cases} 2x - y + z = 6 \\ x + 3y - z = 10 \\ -5x + y + z = 2 \end{cases}$$

(a) verdadeiro

(b) falso

Plano de Aula Semanal nº 10

Acadêmico: Cássio Emanuel Oliveira

Professor(a) Orientador(a): Elizangela Weber

Unidade Concedente: Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia Farroupilha

Estágio – Turma/Nº de alunos: 2º ano - 33 alunos

Professor(a) Regente da Classe: Julhane Alice Thomas Schulz

Data/Horário: 22/10/2025 - 3 períodos - 7h 30 min as 10h

23/10/2025 - 1 período - 13h 30min as 14h 20min

1 .Tema/Assunto:

Números e Álgebra - Matrizes, Determinantes e Sistemas lineares

2. Objetos de Conhecimento:

- Avaliação dos cadernos
- Prova.

3. Habilidades relativas a BNCC:

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

4 . Objetivos

- Revisar e consolidar os conceitos fundamentais de matrizes e determinantes.
- Revisar conceitos e métodos de resolução de sistemas lineares, identificando suas classificações e aplicando técnicas como substituição, escalonamento e regra de Cramer para solucionar problemas.
- Aplicar corretamente os métodos de resolução de sistemas lineares 2×2 e 3×3 através de problemas contextualizados.
- Resolver problemas práticos que exigem a modelagem e a solução de sistemas lineares utilizando as técnicas estudadas.

5. Metodologia

Prova e Trabalho Avaliativo

6. Recursos

Materiais de uso comum: lápis, borracha, caderno, folhas, etc.

Materiais/recursos didáticos: material impresso.

7. Desenvolvimento

Incentivação:

No primeiro momento, será realizada a entrega dos trabalhos avaliativos em conjunto a uma breve correção das questões presentes no trabalho. Na sequência, será realizada a prova final sobre todo o conteúdo e, ao mesmo tempo, o professor

irá avaliar os registros dos cadernos dos alunos referente a aos conceitos, atividades e exercícios sobre todos os conteúdos, realizados em sala de aula e como tema de casa.

Desenvolvimento da aula:

Atividade 1: Será desenvolvida uma prova individual (Apêndice I) sem consulta, abordando todo o conteúdo de matrizes, determinantes e sistemas lineares. A prova terá peso de 10 pontos.

PROVA

1) Analise as seguintes afirmativas sobre a ordem, os tipos e as operações com matrizes. Considere A uma matriz de ordem $m \times n$, B de ordem $p \times q$, e C uma matriz quadrada.

I. Se a ordem de A é 3×2 , a ordem da sua transposta A^t será 2×3 .

II. Para que a soma $A + B$ seja definida, é necessário e suficiente que $m = p$ e $n = q$.

III. O produto de matrizes $A \cdot B$ está definido se, e somente se, o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B ($n = p$).

(a) Apenas I e II são verdadeiras.

(b) Apenas II é verdadeira.

(c) Apenas I é verdadeira.

(d) Apenas I e III são verdadeiras.

(e) Todas as afirmativas são verdadeiras.

Solução:

I - Verdadeira. A matriz transposta transforma linhas em colunas, invertendo a ordem da matriz.

II - Verdadeira. Para que a soma de duas matrizes seja possível, é necessário que a ordem das matrizes seja igual.

III - Verdadeira. Para que a multiplicação de duas matrizes seja possível, é necessário que o número de colunas da primeira matriz seja igual ao número de linhas da segunda matriz.

2) Determine a matriz $A = (a_{ij})$ de ordem 2×3 (duas linhas e três colunas), definida pela lei de formação:

$$a_{ij} = \begin{cases} i + 2j, & \text{se } i < j \\ 3i - j, & \text{se } i \geq j \end{cases}$$

Solução:

$$a_{11} = 3 \cdot 1 - 1 = 2$$

$$a_{12} = 1 + 2 \cdot 2 = 5$$

$$a_{13} = 1 + 2 \cdot 3 = 7$$

$$a_{21} = 3 \cdot 2 - 1 = 5$$

$$a_{22} = 3 \cdot 2 - 2 = 4$$

$$a_{23} = 2 + 2 \cdot 3 = 8$$

Matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

3) (FGV - 2020) A matriz X tal que $AX = B$, em que soma de seus elementos o valor

(a) 12

(b) 27

(c) 16

(d) 18

(e) 14

Solução:

Primeiramente, vamos analisar a multiplicação. Para que haja multiplicação é necessário que o número de colunas da primeira matriz seja igual ao de linhas da segunda matriz, com a matriz resultante sendo definida pela linha e coluna restantes. A matriz A tem ordem 2 x 2 e a matriz B tem ordem 2 x 1. Portanto, a matriz X que multiplica A, tem ordem 2 x 1. Sabendo disso, podemos definir duas incógnitas para representar os elementos da matriz X, assim temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Efetuada a multiplicação, teremos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 5x + 2y = 6 \end{cases}$$

Multiplicando a 1ª equação por -2, temos:

$$\begin{cases} -6x - 2y = 0 \\ 5x + 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow -x = 6 \Rightarrow x = -6$$

Substituindo em uma das equações, temos:

$$3(-6) + y = 0 \Rightarrow y = 18$$

A matriz X é:

$$X = \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Somando os elementos da matriz temos:

$$-6 + 18 = 12$$

$$A = \begin{pmatrix} x & 3x & x \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} x & 3x & x \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ e sendo $\det A = 6$, determine o valor de x

(a) 1

(b) 3

(c) 5

(d) 6

(e) 9

Solução:

Calculando o determinante temos:

$$\det A = x \cdot 1 \cdot 1 + 3x \cdot 1 \cdot 2 + x \cdot 3 \cdot 3 - x \cdot 1 \cdot 2 - x \cdot 1 \cdot 3 - 3x \cdot 3 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$\det A = x + 6x + 9x - 2x - 3x - 9x = 6$$

$$2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

5) (UEG - 2019) Em um torneio de vôlei, as equipes A, B, C e D obtiveram os resultados registrados na tabela a seguir.

Equipe	Vitórias por 3x0	Vitórias por 3x2 ou 3x1	Derrotas por 3x2 ou 3x1	Derrotas por 3x0
A	7	4	2	0
B	3	5	3	2
C	1	2	6	4
D	0	4	4	5

Sabendo-se que cada resultado, pelo regulamento do torneio, tem a pontuação correspondente segundo a tabela a seguir, a matriz que corresponde à pontuação total no torneio de cada equipe é

Resultado	Número de pontos
Vitórias por 3x0	3
Vitórias por 3x2 ou 3x1	2
Derrotas por 3x2 ou 3x1	1
Derrotas por 3x0	0

(a) $\begin{pmatrix} 31 \\ 22 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 31 \\ 19 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 31 \\ 22 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 31 \\ 19 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 31 \\ 22 \\ 20 \\ 17 \end{pmatrix}$

Solução:

Matriz dos resultados:

$$R = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Matriz de pontuação:

$$P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Agora vamos obter a matriz de pontuação total. Temos:

$$T = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Equipe A: } 7 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 31$$

$$\text{Equipe B: } 3 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 22$$

$$\text{Equipe C: } 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 13$$

$$\text{Equipe D: } 0 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 12$$

$$T = \begin{pmatrix} 31 \\ 22 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix}$$

6) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, o determinante de $(AB + A^t)$, em que A^t é a transposta da matriz A, é igual a:

(a) 20

(b) -20

(c) -18

(d) 5

(e) -5

Solução:

Vamos calcular a multiplicação entre A e B. Temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 7 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) & 7 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}$$

Agora vamos encontrar a matriz transposta de A. Temos:

$$A^t = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Vamos somar as duas matrizes. Temos:

$$AB + A^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 5+7 \\ 2+2 & 12+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 4 & 17 \end{bmatrix}$$

Por fim, vamos calcular o determinante. Temos:

$$\det(AB + A^t) = 4 \cdot 17 - 12 \cdot 4 = 68 - 48 = 20$$

7) (UEMG - 2019) No plano, o sistema $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 6x + 9y = -3 \end{cases}$ é representado por um par de retas

(a) coincidentes

(b) distintas e paralelas

(c) concorrentes no ponto $(0, -\frac{1}{3})$

(d) concorrentes no ponto $(0, -\frac{2}{3})$

Solução:

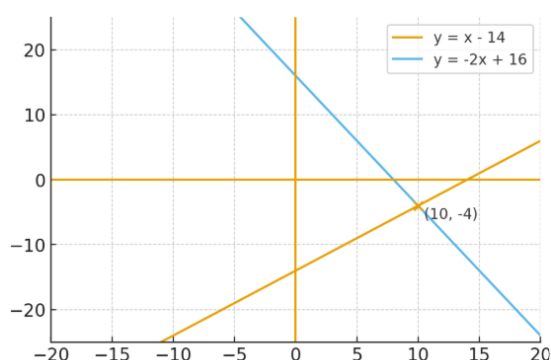
Multiplicando a 1ª equação por -3, temos:

$$\begin{cases} -6x - 9y = 3 \\ 6x + 9y = -3 \end{cases} \Rightarrow 0x + 0y = 0$$

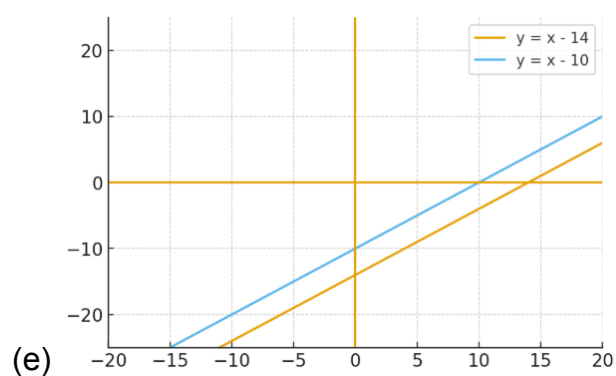
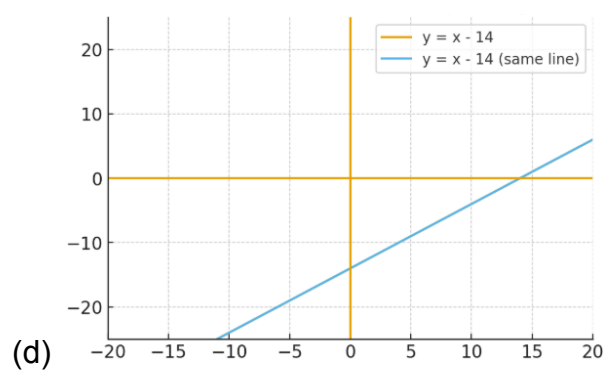
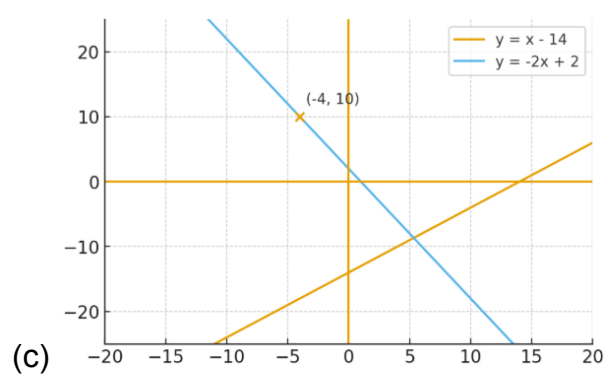
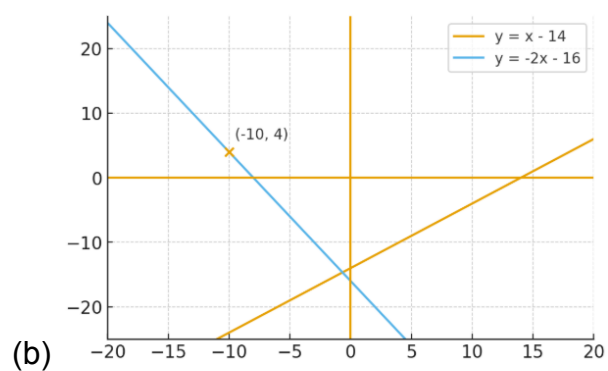
Chegamos na equação $0x + 0y = 0$, o que demonstra que para quaisquer valores que atribuirmos a x e y , ela sempre será verdadeira. Desse modo, estamos diante de um sistema possível e indeterminado (SPI), no qual existem infinitas soluções. Neste caso, ao representarmos no plano, teremos duas retas coincidentes.

8) Resolva o sistema de equações abaixo, classifique-o e indique a solução

$$\begin{cases} x - y = 14 \\ 3x + 2y = 22 \end{cases}$$



(a)



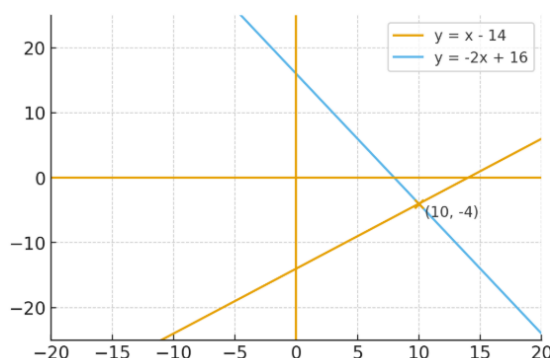
Solução:
Multiplicando a 1ª equação por 2, temos:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 28 \\ 3x + 2y = 22 \end{cases} \Rightarrow 5x = 50 \Rightarrow x = \frac{50}{5} \Rightarrow x = 10$$

Substituindo x em uma das equações, temos:

$$10 - y = 14 \Rightarrow y = -4$$

Através da resolução do sistema, concluímos que a solução é dada por $S = (10, -4)$, sendo a única solução possível do sistema. Desse modo, trata-se de um sistema possível e determinado (SPD), no qual existe apenas uma solução válida. Graficamente, nós temos:



Podemos observar que o gráfico é composto por duas retas concorrentes que se interceptam no ponto $(10, -4)$, isto é, exatamente a solução do sistema linear.

9) Uma marcenaria fabrica cadeiras e mesas de madeira. Cada cadeira leva 4 horas de trabalho e 6 tábuas de madeira. Cada mesa leva 10 horas de trabalho e 8 tábuas de madeira. Em uma semana, a marcenaria utilizou 96 tábuas e trabalhou 92 horas no total.

Quantas cadeiras e mesas foram produzidas nessa semana?

Solução:

Vamos definir x como o número de cadeiras e y como o número de mesas. Sendo assim, temos as seguintes equações:

- Uso de tábuas: $6x + 8y = 96$
- Horas de trabalho: $4x + 10y = 92$

Temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 6x + 8y = 96 \\ 4x + 10y = 92 \end{cases}$$

Agora, vamos resolver o problema pelo método de adição. Vamos multiplicar a equação I por -2 e a equação II por 3 . Temos:

$$\begin{cases} 6x + 8y = 96 \cdot (-2) \\ 4x + 10y = 92 \cdot (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -12x - 16y = -192 \\ 12x + 30y = 276 \end{cases} \Rightarrow 14y = 84 \Rightarrow y = \frac{84}{14} \Rightarrow y = 6$$

Vamos substituir y em uma das equações. Temos:

$$4x + 10(6) = 92 \Rightarrow 4x = 32 \Rightarrow x = \frac{32}{4} \Rightarrow x = 8$$

Portanto, foram produzidas 8 cadeiras e 6 mesas.

10) Uma nutricionista elabora dietas para três pacientes (P1,P2,P3), utilizando uma combinação de três tipos de alimentos: Alimento A (a), Alimento B (b) e Alimento C (c). Os pesos (em gramas) consumidos por cada paciente em um dia, juntamente com o total de calorias (Kcal) ingeridas, estão na tabela:

Paciente	Alimento A (a)	Alimento B (b)	Alimento C (c)	Total de Calorias
P_1	100 g	100 g	100 g	600 Kcal
P_2	200 g	100 g	300 g	1100 Kcal
P_3	100 g	200 g	100 g	800 Kcal

Considerando a, b e c como o valor calórico por 100 gramas de cada alimento, utilize o Método de Escalonamento para resolver o sistema e determine o valor calórico total de uma porção de 100g de Alimento A, 100g de Alimento B e 200g de Alimento C.

Solução:

Primeiramente, vamos transpor os dados para um sistema. Temos:

$$\begin{cases} 1a + 1b + 1c = 600 & (L_1) \\ 2a + 1b + 3c = 1100 & (L_2) \\ 1a + 2b + 1c = 800 & (L_3) \end{cases}$$

A matriz completa do sistema é:

$$[A|B] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 2 & 1 & 3 & 1100 \\ 1 & 2 & 1 & 800 \end{array} \right)$$

Para zerar a 1ª coluna na 2ª e 3ª linhas vamos utilizar as seguintes equações:

$$L_2 = -2 \cdot L_1 \text{ e } L_3 = L_3 - L_2.$$

Linha 2:

$$\begin{aligned} a_{21} &= -2 \cdot 1 + 2 = 0 \\ a_{22} &= -2 \cdot 1 + 1 = -1 \\ a_{23} &= -2 \cdot 1 + 3 = 1 \\ a_{24} &= -2 \cdot 600 + 1100 = -100 \end{aligned}$$

Linha 3:

$$\begin{aligned} a_{31} &= 1 - 1 = 0 \\ a_{32} &= 2 - 1 = 1 \\ a_{33} &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$a_{34} = 800 - 600 = 200$$

Nova matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & -1 & 1 & -100 \\ 0 & 1 & 0 & 200 \end{array} \right)$$

Vamos transpor para um sistema linear. Temos:

$$\begin{cases} a + b + c = 600 & (L_1) \\ -b + c = -100 & (L'_2) \\ b = 200 & (L'_3) \end{cases}$$

Como já temos o valor de b, basta substituí-lo na equação II. Temos:

$$-200 + c = -100 \Rightarrow c = 100$$

Substituindo c e b na equação I, temos:

$$a + 200 + 100 = 600 \Rightarrow a = 300$$

Agora, vamos calcular o valor calórico para uma porção de 100g de a, 100g de b e 200g de c. Para tal, basta multiplicar por 2 o valor de c, já que as outras porções são padrão. Temos:

$$a + b + 2c = 300 + 200 + 200 = 700$$

Portanto, o valor calórico total da nova porção é de 700 Kcal.

Sistematização/Fechamento da Aula:

Será realizada a entrega da prova final em conjunto com a resolução de todas as questões presentes na prova.

8. Avaliação

O processo de avaliação será composto por um instrumento formal: uma Prova centrada nos Objetos de Conhecimento de Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares.

A Prova será individual e sem consulta, com um peso significativo, sendo atribuído o valor 10 (dez) na composição da nota. O objetivo é avaliar a capacidade de modelagem e resolução de problemas contextualizados que envolvem o conteúdo estudado. Além disso, tem o objetivo de verificar a proficiência técnica na aplicação dos métodos de resolução, como a Regra de Cramer e o Escalonamento.

9. Bibliografias

ANDRADE, Thaís M. de. **Matemática Interligada:** Matrizes, sistemas lineares e Geometria analítica. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020.

ASTH, Rafael C. Exercícios de Matrizes (com questões resolvidas e explicadas). Toda Matéria. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/matrizes-exercicios/>>. Acesso em: 12 out. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

DANTE, Luiz R. **Matemática: Contexto & Aplicações** - 2º ano: Ensino Médio. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

JR, Gilberto Santos. **Apostila de Matrizes** (10 páginas, 65 questões, com gabarito).pdf. Google Docs. Disponível em: <<https://drive.google.com/file/d/1if8xG18kwi3UvywyY8m7o8MuY3SPvuWu/view?pli=1>>. Acesso em: 12 out. 2025.

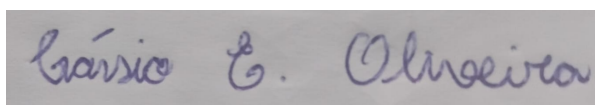
LEONARDO, Fábio M. de. **Conexões: Matemática e suas tecnologias** - Matrizes e Geometria analítica. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2020.

QUESTÕES Vestibular de Matemática - **Sistemas Lineares**, 2025. Disponível em: <<https://www.qconcursos.com/questoes-de-vestibular/disciplinas/matematica-matematica/sistemas-lineares/questoes?page=3>>. Acesso em: 12 out. 2025.

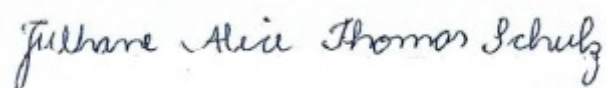
RODRIGUES, Raul. **Exercícios sobre matriz**. Exercícios Mundo Educação. Disponível em: <<https://exercicios.mundoeducacao.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-matriz.htm>>. Acesso em: 12 out. 2025.

10. Observações

Na aula destinada à prova individual, os estudantes apresentaram boa organização e foco. Durante a revisão inicial, sanaram dúvidas pertinentes e demonstraram recordar os conceitos básicos trabalhados ao longo do estágio. A maioria conseguiu resolver os exercícios com autonomia, especialmente aqueles relacionados às técnicas algébricas e determinantes. As dificuldades mais frequentes ocorreram nos problemas contextualizados, indicando necessidade de reforço na interpretação. No geral, a turma manteve bom comportamento e demonstrou avanço significativo no conteúdo.



Cássio Emanuel Oliveira
Aluno – Estagiário



Julhane Alice Thomas Schulz
Supervisor – Parte Concedente



Elizangela Weber
Professor Orientador – Entidade Educacional

Apêndice I - Prova

PROVA

1) Analise as seguintes afirmativas sobre a ordem, os tipos e as operações com matrizes. Considere A uma matriz de ordem $m \times n$, B de ordem $p \times q$, e C uma matriz quadrada.

I. Se a ordem de A é 3×2 , a ordem da sua transposta A^t será 2×3 .

II. Para que a soma $A + B$ seja definida, é necessário e suficiente que $m = p$ e $n = q$.

III. O produto de matrizes $A \cdot B$ está definido se, e somente se, o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B ($n = p$).

(a) Apenas I e II são verdadeiras.

(b) Apenas II é verdadeira.

(c) Apenas I é verdadeira.

(d) Apenas I e III são verdadeiras.

(e) Todas as afirmativas são verdadeiras

2) Determine a matriz $A = (a_{ij})$ de ordem 2×3 (duas linhas e três colunas), definida pela lei de formação:

$$a_{ij} = \begin{cases} i + 2j, & \text{se } i < j \\ 3i - j, & \text{se } i \geq j \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

3) (FGV - 2020) A matriz X tal que $AX = B$, em que soma de seus elementos o valor

(a) 12

(b) 27

(c) 16

(d) 18

(e) 14

$$A = \begin{pmatrix} x & 3x & x \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} x & 3x & x \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ e sendo $\det A = 6$, determine o valor de x

(a) 1

(b) 3

(c) 5

(d) 6

(e) 9

5) (UEG - 2019) Em um torneio de vôlei, as equipes A, B, C e D obtiveram os resultados registrados na tabela a seguir.

Equipe	Vitórias por 3x0	Vitórias por 3x2 ou 3x1	Derrotas por 3x2 ou 3x1	Derrotas por 3x0
A	7	4	2	0
B	3	5	3	2
C	1	2	6	4
D	0	4	4	5

Sabendo-se que cada resultado, pelo regulamento do torneio, tem a pontuação correspondente segundo a tabela a seguir, a matriz que corresponde à pontuação total no torneio de cada equipe é

Resultado	Número de pontos
Vitórias por 3x0	3
Vitórias por 3x2 ou 3x1	2
Derrotas por 3x2 ou 3x1	1
Derrotas por 3x0	0

(a) $\begin{pmatrix} 31 \\ 22 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 31 \\ 19 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 31 \\ 22 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 31 \\ 19 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 31 \\ 22 \\ 20 \\ 17 \end{pmatrix}$

6) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, o determinante de $(AB + A^t)$, em que A^t é a transposta da matriz A, é igual a

(a) 20

(b) -20

(c) -18

(d) 5

(e) -5

7) (UEMG - 2019) No plano, o sistema $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 6x + 9y = -3 \end{cases}$ é representado por um par de retas

(a) coincidentes

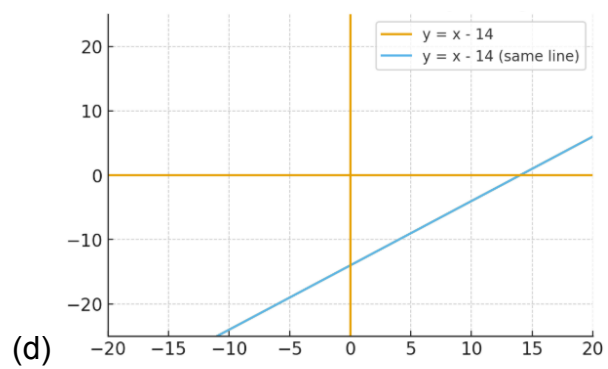
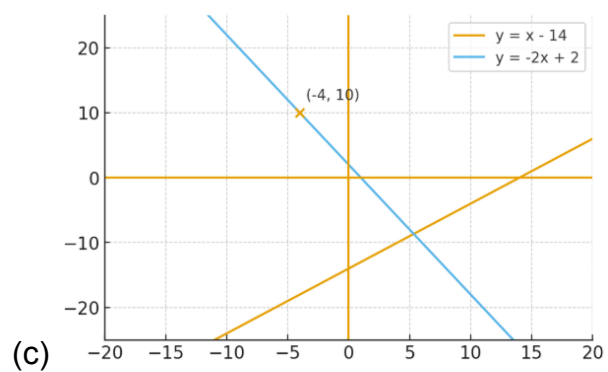
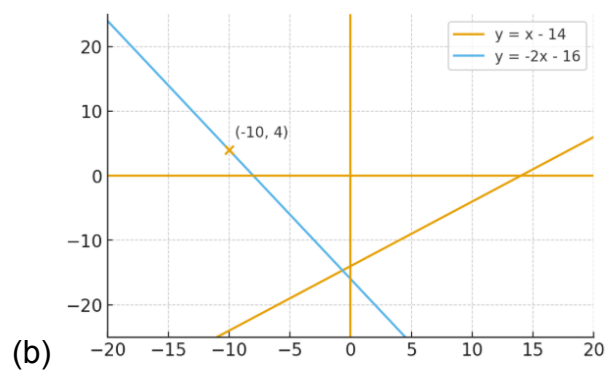
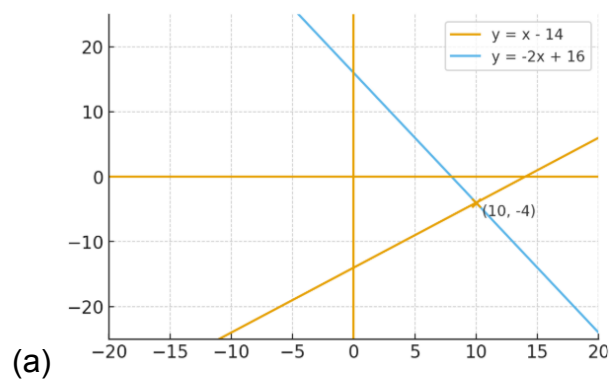
(b) distintas e paralelas

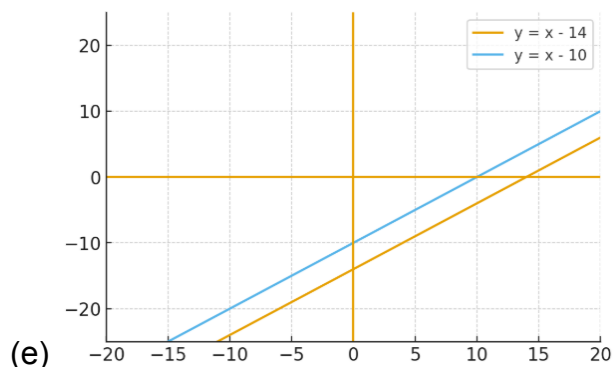
(c) concorrentes no ponto $(0, -\frac{1}{3})$

(d) concorrentes no ponto $(0, -\frac{2}{3})$

8) Resolva o sistema de equações abaixo, classifique-o e indique a solução

$$\begin{cases} x - y = 14 \\ 3x + 2y = 22 \end{cases}$$





9) Uma marcenaria fabrica cadeiras e mesas de madeira. Cada cadeira leva 4 horas de trabalho e 6 tábuas de madeira. Cada mesa leva 10 horas de trabalho e 8 tábuas de madeira. Em uma semana, a marcenaria utilizou 96 tábuas e trabalhou 92 horas no total.

Quantas cadeiras e mesas foram produzidas nessa semana?

10) Uma nutricionista elabora dietas para três pacientes (P_1, P_2, P_3), utilizando uma combinação de três tipos de alimentos: Alimento A (a), Alimento B (b) e Alimento C (c). Os pesos (em gramas) consumidos por cada paciente em um dia, juntamente com o total de calorias (Kcal) ingeridas, estão na tabela:

Paciente	Alimento A (a)	Alimento B (b)	Alimento C (c)	Total de Calorias
P_1	100 g	100 g	100 g	600 Kcal
P_2	200 g	100 g	300 g	1100 Kcal
P_3	100 g	200 g	100 g	800 Kcal

Considerando a , b e c como o valor calórico por 100 gramas de cada alimento, utilize o Método de Escalonamento para resolver o sistema e determine o valor calórico total de uma porção de 100g de Alimento A, 100g de Alimento B e 200g de Alimento C.