

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
FARROUPILHA- *CAMPUS* SANTA ROSA

CURSO SUPERIOR LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MARIA VITÓRIA MORESCO DALCIN

RELATÓRIO DE ATIVIDADES DE ESTÁGIO

SANTA ROSA, RS
2025

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
FARROUPILHA- *CAMPUS* SANTA ROSA

MARIA VITÓRIA MORESCO DALCIN

RELATÓRIO DE ATIVIDADES DE ESTÁGIO

Trabalho apresentado como requisito para
obtenção do título de Licenciada em
Matemática, do curso de Licenciatura em
Matemática do Instituto Federal
Farroupilha – *Campus* Santa Rosa.

Orientadora: Ma. Marília Boessio Tex de
Vasconcellos

SANTA ROSA, RS
2025

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
FARROUPILHA- CAMPUS SANTA ROSA

A Orientadora Professora Ma. Marilia Boessio Tex de Vasconcellos e a Estagiária Maria Vitória Moresco Dalcin, abaixo assinados, cientificam-se do teor do Relatório de Atividades de Estágio, do Curso de Licenciatura em Matemática.

RELATÓRIO DE ATIVIDADES
DE ESTÁGIO

Elaborado por
Maria Vitória Moresco Dalcin

como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Ma. Marilia Boessio Tex de Vasconcellos
Orientadora

Maria Vitória Moresco Dalcin
Estagiária

SANTA ROSA, RS
2025

DADOS DE IDENTIFICAÇÃO

1 Estagiária

1.1 Nome: Maria Vitória Moresco Dalcin

1.2 Curso: Licenciatura em Matemática

1.3 Turma: MAT T12

1.4 Endereço: Rua José Bonifácio, 1203, Vila Balneária, Bairro Central

1.5 Município e Estado: Santa Rosa/RS

1.6 CEP: 98.787-552

1.7 Telefone: (55) 9 9910-4243

1.8 E-mail: maria.2022006229@aluno.iffar.edu.br

2 Escola

2.1 Nome: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha - *Campus Santa Rosa*

2.2 Endereço: Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400, Bairro Central

2.3 Município e Estado: Santa Rosa/RS

2.4 CEP: 98.787-740

2.5 Telefone: (55) 2013-0200

2.6 E-mail: gabinete.sr@iffarroupilha.edu.br

3 Estágio

3.1 Área de realização: Educação Básica – Ensino Médio

3.2 Coordenadora do Curso: Ma. Mariele Josiane Fuchs

3.3 Professora Orientadora: Ma. Marília Boessio Tex de Vasconcellos

3.4 Professora Coorientadora: Ma. Marília Boessio Tex de Vasconcellos

3.5 Supervisor do estágio/Regente da turma: Dr. Eduardo Padoin

3.6 Carga horária total: 140h

3.7 Data de início e término: 06 de agosto de 2025 a 10 de dezembro de 2025.

AGRADECIMENTOS

À minha família e amigos.

Aos meus colegas. Principalmente à Bruna, Débora, Eduarda, Gabriela Cabral, Gabriela Neto e Natine por compartilharem o processo comigo, sempre cercado de muito apoio e incentivo.

À professora Marilia, agradeço pelo tempo dedicado às sugestões e ajuda durante todo o processo de estágio, pelo olhar compreensivo, e por compartilhar sua experiência e conhecimento comigo a cada orientação.

Ao professor supervisor, Eduardo Padoin, que acompanhou de perto cada aula realizada, sempre reforçando os aspectos positivos e indicando os aspectos a serem melhorados, e pelas reflexões proporcionadas em cada conversa.

Aos professores e servidores do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha - *Campus* Santa Rosa, que me acolhem desde 2019, quando entrei no Ensino Médio Técnico Integrado em Móveis (aproveito para saudar meus colegas do MOIT10, que permanecem comigo até hoje). Ao me colocar em frente ao quadro, minha perspectiva se expande e compreendo melhor os desafios de cada professor que passou pela minha vida.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Unidades do IF Farroupilha.....	12
Figura 2: Quadro de inauguração do Campus.....	13
Figura 3: Fachada do prédio principal em primeiro plano.....	13
Figura 4: Mapa Estratégico do IFFar para o período 2019-2026.....	15
Figura 5: Diagrama em etapas com perguntas norteadoras para interpretação dos enunciados.....	30
Figura 6: Questão 3 sobre o lançamento de dois dados.....	32
Figura 7: Alunos realizando a lista de exercícios de revisão dos conceitos.....	33
Figura 8: Erro técnico na simplificação de fração.....	35
Figura 9: Erro por distração na transcrição da questão 2.....	35
Figura 10: Erro por distração na simplificação de fração.....	36
Figura 11: Erro por distração em contas de multiplicação.....	36
Figura 12: Erro por distração (esquecimento) no cálculo da probabilidade.....	37
Figura 13: Erro por distração e/ou cópia de dados na avaliação.....	38
Figura 14: Erro técnico na simplificação de fração.....	39
Figura 15: Erro não compreendido - divergência entre alternativa marcada e resolução apresentada.....	39
Figura 16: Recado do aluno D em sua prova - “me falta interpretação”.....	40

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Resultado da atividade com 5 questões.....	31
Quadro 2: Relação de notas da prova sobre Análise Combinatória e Probabilidade.....	41

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	9
2 A ESCOLA – CAMPO DE INTERVENÇÃO DO ESTÁGIO.....	11
2.1 HISTÓRICO DO INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FARROUPILHA (IFFAR) - CAMPUS SANTA ROSA.....	11
2.2 CONTEXTO SOCIAL.....	15
2.3 CONTEXTO CULTURAL.....	17
2.4 DINÂMICA PEDAGÓGICA.....	20
3 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS.....	23
3.1 A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO CAMPO DE INTERVENÇÃO DO ESTÁGIO.....	23
3.2 A TURMA DO ESTÁGIO.....	25
3.3 OS PROCEDIMENTOS DIDÁTICOS METODOLÓGICOS DO ESTÁGIO.....	27
3.3.1 O Estudo da Análise Combinatória e Probabilidade.....	27
3.3.2 A Avaliação – prova escrita.....	34
3.3.3 O Estudo dos Juros Simples e Compostos.....	42
3.4 A RELAÇÃO TEORIA E PRÁTICA NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR.....	45
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	47
REFERÊNCIAS.....	48
APÊNDICE.....	50

1 INTRODUÇÃO

O presente Relatório de Estágio apresenta as atividades realizadas no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha - *Campus* Santa Rosa com a turma de 3º ano do Ensino Médio Técnico Integrado em Mecatrônica, desenvolvidas para o Componente Curricular “Estágio Curricular Supervisionado IV” do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha - *Campus* Santa Rosa, no segundo semestre de 2025.

Todo o processo que constituiu o Estágio Curricular Supervisionado IV foi desenvolvido em seis etapas: observações de aula, análise conjuntural, regência de classe e participação em reunião pedagógica, além da elaboração do relatório que aqui se apresenta e do seminário final. A fim de proporcionar vivências do ser docente, vinculando conhecimentos pedagógicos e específicos matemáticos no âmbito da comunidade escolar, as práticas pedagógicas fundamentam as reflexões aqui apresentadas sobre o processo de ensino e aprendizagem da matemática do ponto de vista docente e as percepções sobre o “ser professor”.

O trabalho aqui expresso está organizado em quatro capítulos. O segundo capítulo fundamenta a pesquisa anterior à prática pedagógica, contextualizando o espaço escolar e a dinâmica pedagógica da escola. Em seguida, o terceiro capítulo relata a minha vivência em sala de aula, no papel de professora de Matemática, por meio de reflexões acerca da Educação Matemática e prática pedagógica no campo de intervenção do estágio. Por fim, o quarto capítulo apresenta as considerações finais, analisando como as expectativas, vivências, desafios e aprendizagem resultantes do estágio impactaram a minha formação docente.

Os autores e referências que trago para reflexão vão ao encontro do que penso sobre o processo formativo que acompanha a educação. Com isso em mente, é embasamento teórico para este trabalho: Luckesi (2005) e Boufleuer (2000), Severino (1994), Tardif (2014), além de referenciais em Educação Matemática, como Lorenzato (2010), Lima e Rios (2019), Pais (2006), Onrubia, Rochera e Barberà (2004), Brum e Cury (2013).

Da mesma forma, são abordados o Projeto Pedagógico do Curso Técnico em Mecatrônica – Integrado (PPC) (Santa Rosa, 2021) e o Plano de Desenvolvimento Institucional (PDI) (Santa Maria, 2019) da escola concedente, além de documentos como as Orientações Curriculares Nacionais para área de Matemática (OCNEM)

(BRASIL, 2006), a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) (BRASIL, 1996) nº 9.394, vigente desde 1996, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017), homologada em 2017.

A partir das vivências deste estágio, conheci uma realidade de sala de aula diferente daquela do Ensino Fundamental, desta vez em um novo ambiente de construção da Educação Matemática, com uma nova organização de currículo, escolar e de planejamento de aulas. Neste novo contexto, em meio a todas as suas potencialidades, não só a qualidade do trabalho melhora, como o processo de ensino e de aprendizagem chega mais próximo da sua forma “ideal”. Tudo isso enquanto aprendo a “ser professora” e a aprendizagem se estabelece conforme as realidades individuais de cada aluno.

2 A ESCOLA – CAMPO DE INTERVENÇÃO DO ESTÁGIO

Nos pressupostos da ação pedagógica o professor encontra subsídio para significar o conhecimento para o seu aluno. São eles os sujeitos e os lugares nos quais a educação se constitui, em uma perspectiva cada vez mais globalizada do mundo.

A seção que segue apresenta essa pesquisa anterior à prática pedagógica, compreendendo as etapas referentes às observações de aula e a participação em uma reunião pedagógica, além da análise conjuntural realizada ao longo de todo o período do estágio.

2.1 HISTÓRICO DO INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FARROUPILHA (IFFAR) - *CAMPUS SANTA ROSA*

O Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha (IFFar), tem como marco inicial a constituição da Reitoria em Santa Maria e a implementação dos *Campi* Alegrete, Júlio de Castilhos, Santo Augusto e São Vicente do Sul, através da Lei nº 11.892, de 29 dezembro de 2008, que instituiu a Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica. O Instituto foi criado mediante integração do Centro Federal de Educação Tecnológica de São Vicente do Sul, da Escola Agrotécnica Federal de Alegrete, e da Unidade Descentralizada de Ensino de Santo Augusto, que anteriormente pertencia ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Bento Gonçalves.

A Instituição é pública e gratuita, com autonomia administrativa, patrimonial, financeira, didático-pedagógica e disciplinar. Sua atuação na comunidade oferece uma formação integral, gratuita e de qualidade em diferentes níveis e modalidades de ensino, como os cursos Técnicos Integrados ao Ensino Médio (EMI), cursos Técnicos Subsequentes, cursos de Graduação (bacharelado, licenciatura e tecnologia) e cursos de Pós-Graduação, englobando também o desenvolvimento de pesquisa e extensão, de forma pluricurricular e multicampi (Figura 1).

Figura 1: Unidades do IF Farroupilha.

Reitoria e Campi

1. Reitoria
2. *Campus Alegrete*
3. *Campus Frederico Westphalen*
4. *Campus Jaguarí*
5. *Campus Júlio de Castilhos*
6. *Campus Panambi*
7. *Campus Santa Rosa*
8. *Campus Santo Ângelo*
9. *Campus Santo Augusto*
10. *Campus São Borja*
11. *Campus São Vicente do Sul*
12. *Campus Uruguiana*

Centros de Referência

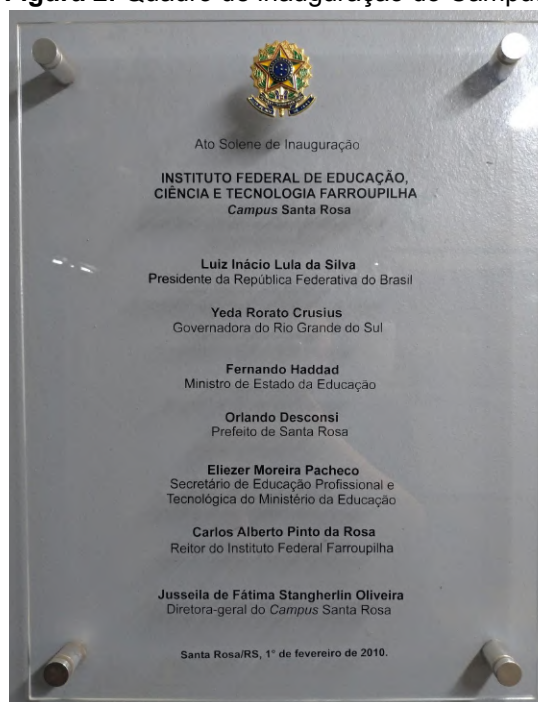
- a. Santiago
- b. São Gabriel



Fonte: IF Farroupilha (s. d.).

O IFFar – *Campus Santa Rosa* teve sua criação oficial em Brasília, no dia 19 de dezembro de 2009. No dia 07 de maio de 2010 foi realizada a cerimônia oficial de entrega do *Campus* à comunidade, marcando o que seria considerada a data de aniversário do *Campus Santa Rosa* (Figura 2). No ano que marca os seus 15 anos, o IF Farroupilha – *Campus Santa Rosa* conta com aproximadamente 1155 alunos, desde o nível Básico (Ensino Médio) até o Ensino Superior.

Figura 2: Quadro de inauguração do Campus.



Fonte: A Autora (2025).

É localizado no Bairro Central, Av. Cel. Bráulio de Oliveira, número 1400, na zona urbana do município de Santa Rosa/RS (Figura 3), e abrange treze municípios da região Noroeste do estado do Rio Grande do Sul: Alecrim, Cândido Godói, Independência, Novo Machado, Porto Lucena, Porto Mauá, Porto Vera Cruz, Santa Rosa, Santo Cristo, São José do Inhacorá, Três de Maio, Tucunduva e Tuparendi.

Figura 3: Fachada do prédio principal em primeiro plano.



Fonte: A Autora (2023).

Os cursos oferecidos são definidos a partir das demandas sociais e econômicas regionais, para promover ações que dialoguem com a comunidade. Esta integração permite o desenvolvimento pessoal e profissional dos estudantes alinhados à realidade local. São eles:

- Cursos Técnicos na modalidade Integrada: Edificações, Mecatrônica e Móveis; Técnico em Alimentos (PROEJA);
- Cursos Técnicos na modalidade Subsequente: Administração (EaD);
- Cursos Superiores: Bacharelado em Administração, Bacharelado em Arquitetura e Urbanismo, Licenciatura em Ciências Biológicas, Licenciatura em Matemática, Tecnologia em Alimentos e Tecnologia em Mecatrônica Industrial.

A equipe docente é composta por 62 professores, incluindo 10 professores com formação em Matemática e pós-graduação *Lato Sensu* e *Stricto Sensu* nas áreas de Matemática Aplicada e Educação Matemática, que atendem a carga horária semanal demandada nos componentes da área de Matemática. A equipe técnico-administrativa é composta por 56 servidores.

Por se tratar de uma instituição de âmbito federal, no lugar do Projeto Político Pedagógico, sua organização é expressa no Plano de Desenvolvimento Institucional (PDI) 2019-2026. O PDI “contempla objetivos, metas e ações, observando a coerência e a articulação entre as diversas ações, a manutenção dos padrões de qualidade e, quando pertinente, o orçamento” (Santa Maria, 2019, p. 29), sistematizados na Figura 4. Suas metas e indicadores de desempenho institucional são guias de longo prazo para “garantir a oferta de ensino público, gratuito e de qualidade, nos níveis médio e superior, desenvolvendo ações de ensino, extensão, pesquisa e inovação tecnológica” (Santa Maria, 2019, p. 30) com estratégia e êxito.

Figura 4: Mapa Estratégico do IFFar para o período 2019-2026.



Fonte: Santa Maria (2019).

2.2 CONTEXTO SOCIAL

O município de Santa Rosa, conforme os dados do último censo do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) de 2022, possui uma população de 76.963 pessoas (IBGE, 2023), majoritariamente proveniente da área urbana. O IF Farroupilha - *Campus* Santa Rosa se localiza em meio a uma área residencial em expansão, cercada por novos loteamentos. Nessa região, a principal forma de lazer dos moradores são as quadras de esportes e de areia do *Campus*, por ser uma região sem praças públicas com áreas de convivência e/ou parquinhos e brinquedos para as crianças.

A infraestrutura do IF Farroupilha – *Campus* Santa Rosa inclui biblioteca, refeitório, ginásio, setores administrativos, bem como salas de aula e laboratórios distribuídos ao longo de 5 prédios pedagógicos (3 prédios com salas de aula e 2 prédios com os laboratórios de móveis, edificações e mecânica) (Figura 5).

Figura 5: Parte dos espaços pedagógicos do IF Farroupilha – *Campus Santa Rosa*.



Fonte: A Autora (2025).

Também há rampas de acesso, piso tátil, banheiros adaptados, móveis adaptados e corrimão nas escadas para atender as necessidades dos estudantes e servidores com deficiência. Isso se deve ao fato de que “[...] são exigidos projetos de acessibilidade para todas as obras novas e reformas, inclusive integrando as áreas externas com os ambientes internos dos prédios” (Santa Maria, 2019, p. 107). Nos corredores encontram-se os armários de uso individual dos alunos do Ensino Médio, murais de recado, pallets para os momentos de descanso. As salas de aula seguem um padrão: mesa do professor, classes dos alunos, quadro branco, projetor, ar-condicionado, armário da turma e mural de recados.

A turma do 3º ano do Ensino Médio Técnico Integrado em Mecatrônica é composta, em sua maioria, por alunos de família de classe média, residentes na cidade de Santa Rosa. Ainda assim, há famílias que recebem suporte financeiro de programas sociais para complementação de renda, e parte dos alunos se deslocam diariamente de outras cidades da região para frequentar o curso. Todos os alunos

possuem aparelho celular e acesso à internet; por isso, é preciso ter o devido controle do seu uso em sala de aula, considerando as regulamentações expressas no Decreto nº 12.385, de 18 de fevereiro de 2025, acerca da proibição do uso de aparelhos eletrônicos durante as aulas para fins não-educacionais.

Por meio das reuniões pedagógicas, também ficou evidente a importância da família presente no cotidiano escolar e do acompanhamento que a Assistência Estudantil realiza com cada aluno. O *Campus* reafirma isso em sua preocupação na preparação da escola para receber as famílias em eventos especiais, reuniões e entrega de boletins, além da comunicação direta da coordenação pedagógica e direção com os responsáveis, e parceria das famílias com o Atendimento Educacional Especializado (AEE) que ocorre no contraturno escolar.

Além disso, não basta pensar apenas no âmbito organizacional e burocrático quando falamos de educação. Quando se busca êxito e permanência escolar, o olhar caridoso e a formação humana passa a ser o foco do trabalho.

Assim, as ações institucionais estarão voltadas para a inclusão social, para o desenvolvimento socioeconômico local e regional, para a defesa do meio ambiente, a valorização da memória cultural, da produção artística e do patrimônio cultural, assim como as demais prerrogativas que permeiam os valores, os princípios e a missão do IFFar. (Santa Maria, 2019, p. 47)

Isso se reflete nos projetos institucionais presentes no IFFar, como: o Núcleo de Apoio às Pessoas com Necessidades Específicas (NAPNE), que acompanha os alunos incluídos junto da professora de educação especial em parceria com o Atendimento Educacional Especializado (AEE), a fim de eliminar barreiras para permanência e êxito destes alunos.

2.3 CONTEXTO CULTURAL

A região Noroeste do estado do Rio Grande do Sul, onde se localiza o município de Santa Rosa, tem sua economia baseada na agricultura familiar, produção de máquinas e implementos agrícolas, indústrias alimentícias, turismo rural e pelo setor agropecuário, em geral (Osinski *et al.*, 2022). As características étnicas, culturais e sociais das cidades da região perpassam principalmente as tradições religiosas e heranças na agricultura dos grupos indígenas Guarani e Tape, e imigrantes alemães e italianos. O município de Santa Rosa se localiza em uma

região primitivamente habitada por indígenas do grupo Tapes, que passou a integrar o território dos Sete Povos das Missões com a chegada dos jesuítas e espanhóis. Sua efetiva colonização ocorreu a partir de 1915, após ser fundada a Colônia 14 de Julho por funcionários do serviço de agrimensura que buscavam lotear a região e, posteriormente, pelo afluente de descendentes, principalmente, de alemães e italianos.

Os principais grupos étnicos que constituem a população do município são descendentes de indígenas, portugueses, africanos, italianos, alemães e poloneses (Santa Rosa, s.d.), bem como famílias imigrantes de países vizinhos, como a Argentina.

Com essa diversidade cultural são carregados costumes, valores e crenças individuais que se integram no ambiente escolar. Para promover a socialização dessa diversidade, o IF Farroupilha – *Campus* Santa Rosa promove e participa de atividades ao longo do ano, contemplando datas alusivas como a Páscoa, o Natal, o Dia da Consciência Negra, a Independência do Brasil, Semana Farroupilha, e aniversário do município. O *Campus* também participou de diversas edições dos jogos municipais promovidos entre escolas da cidade, com seus alunos conquistando diversas premiações.

No âmbito cultural, os projetos institucionais presentes no IFFar perpassam o Núcleo de Estudos Afrobrasileiros e Indígenas (NEABI), que promove encontros, oficinas e discussões, valorizando a diversidade e identidade racial e o Núcleo de Gênero e Diversidade Sexual (NUGEDIS), que busca formular ações de promoção ao respeito e valorização de todos os sujeitos. Por meio do Espaço Cultural do IFFar, há também o Núcleo de Arte e Cultura do IF Farroupilha (NAC), para estimular e divulgar a diversidade de expressões artístico-culturais.

Nessa direção, torna-se necessária a promoção de oportunidades que levem ao desenvolvimento da criatividade, do pensamento autônomo e crítico, do desenvolvimento de hábitos de autoaprendizagem como requisitos para a constituição de sujeitos interessados, curiosos, críticos, solidários, os quais possam se inserir de forma autônoma e qualificada no mundo do trabalho. (Santa Maria, 2019, p. 48)

Os Projetos de Ensino são financiados por meio do Programa Institucional de Projetos (PROJEN). Por meio desses, os estudantes têm a possibilidade de atuar como bolsistas, monitores ou como participantes para sanar dúvidas e aprofundar

seus estudos em diferentes áreas. No *Campus* Santa Rosa, os Projetos de Ensino ofertados no ano de 2025 para os alunos são:

- Voltados para área técnica: A monitoria como apoio no processo ensino-aprendizagem nas disciplinas de Desenho Assistido por Computador e Informática Básica e Aplicada 2025; A monitoria como apoio no processo ensino-aprendizagem nas disciplinas de Desenho Técnico e Arquitetônico 2025; Atividades práticas para a aprendizagem dos circuitos elétricos e hidráulicos; Manufatura de peças de xadrez com usinagem CNC: aplicações interdisciplinares no ensino técnico; Monitoria de eletrônica analógica digital; Construção de um forno de fundição para alumínio com materiais recicláveis; Monitoria de sistemas estruturais II.
- Voltados para os componentes curriculares básicos: A monitoria como ferramenta de apoio no processo de ensino-aprendizagem no componente curricular de Física 2025; Monitoria de Química 2025; Monitoria: um espaço para retomar e aprender matemática; Oxigênios: Grupo de Estudo para Olimpíadas Científicas; Projeto de monitoria em Língua Inglesa.
- Artes, cultura e outros: “Ágora: direto ao ponto”; ARQCINE: cinema e debate; Bandas do IFFar Santa Rosa 2025; Estudos e debates sobre a cultura gaúcha com foco nas danças tradicionais; Mentoria e apoio para a aprendizagem - permanência e êxito (para alunos surdos); Nós de Ariadne: tecendo vínculos e aprendizagens através do crochê; NUGEDIS em debate; Oficina De RPG de Mesa: Interação e Convivência Social; Previne Bio - Programa de evitações de novas evasões da Biologia; treinos esportivos.

Aos alunos também são promovidas mostras e eventos científicos, como a Mostra de Educação Profissional e Tecnológica (MEPT) e a Jornada Integrada do Conhecimento (JIC) do IFFar – *Campus* Santa Rosa, incentivos à formação de lideranças com o Encontro de Lideranças e cursos de formação para os líderes estudantis, bem como Mostras Culturais Institucional, Jogos Estudantis do IFFar (Jeif), Encontro Cultural e Tradicionalista de Institutos Federais da Região Sul do Brasil (conhecido como Enconção), entre outros.

2.4 DINÂMICA PEDAGÓGICA

A estrutura organizacional e administrativa do IFFar é guiada pela Portaria nº 1.291, de 30 de dezembro de 2013, do Ministério da Educação. Dentre as unidades que compõem o IFFar, o *Campus* é “voltado ao exercício das atividades permanentes de ensino, pesquisa aplicada, inovação e extensão e ao atendimento das demandas específicas nesse âmbito, em sua área de abrangência territorial” (Santa Maria, 2019, p. 24). Os órgãos executivos que compõem a estrutura do IF Farroupilha – *Campus* Santa Rosa são: Gabinete da Diretora Geral, Diretoria de Planejamento e Desenvolvimento Institucional, Diretoria de Administração, Diretoria de Ensino, Diretoria de Pesquisa, Extensão e Produção. Bem como o Colegiado de *Campus*, considerado um órgão de assessoramento à Direção Geral. A partir desse organograma derivam os demais setores atuantes na Instituição.

No Ensino Médio Integrado, o currículo é denominado “Currículo Integrado”, um projeto construído para “pensar de forma entrelaçada o ensino e a aprendizagem que permeiam a educação básica juntamente com o ensino profissionalizante” (Santa Maria, 2019, p. 50). No IFFar, o eixo tecnológico dos cursos ofertados nos *Campi* considera as necessidades comerciais, produtivas e sociais imediatas da região. Segundo o Projeto Pedagógico do Curso Técnico em Mecatrônica – Integrado (PPC), elaborado em 2021 para estruturar e orientar professores e estudantes:

O curso Técnico em Mecatrônica Integrado atende à comunidade regional contemplando à demanda de tecnologia de ponta apresentada por diferentes setores ao longo dos anos, fundamental para a atuação profissional de forma qualificada atendendo aos anseios dos diversos segmentos da atividade industrial. (Santa Rosa, 2021, p. 9)

Para isso, a formação é dividida em três Núcleos perpassados pela Prática Profissional (Santa Rosa, 2021): i) o Núcleo Básico caracteriza-se pelos conhecimentos e habilidades inerentes à Educação Básica; ii) o Núcleo Tecnológico se destina as disciplinas voltadas para o conhecimento técnico; e iii) o Núcleo Politécnico engloba os conhecimentos básicos e técnicos com maior área de integração e interdisciplinaridade.

O curso Técnico Integrado em Mecatrônica tem como objetivo geral formar profissionais capacitados para atuar nas áreas de projeto, instalação e operação de

equipamentos automatizados e robotizados. Para isso são integrados aparelhos mecânicos e eletrônicos, onde se executam procedimentos de controle de qualidade e gestão. Com isso, busca-se criar “condições para o ingresso no mundo do trabalho e para a continuidade dos estudos” (Santa Rosa, 2021, p. 10).

Assim, ao longo do curso, os alunos trabalham com programação e testes de equipamentos automatizados e robotizados, aprendem a elaborar desenhos técnicos e auxiliado por computador, propor e projetar melhorias nos sistemas convencionais e a incorporação de novas tecnologias nos sistemas de produção, dentre outras habilidades incorporadas em cada núcleo. (Idem, 2021, p. 11).

Em decorrência desta formação universal, o processo avaliativo se adapta e segue por um sistema contínuo e cumulativo, integrando critérios qualitativos e quantitativos de aprendizado. Como determina o PDI:

As avaliações devem ser contínuas, realizadas por meio de atividades que desafiem o estudante a mobilizar os conhecimentos aprendidos na resolução de situações reais ou imagéticas. Nesse sentido, a avaliação pode ser realizada por meio de diferentes instrumentos, de preferência conjugados: de forma escrita, de forma oral, de forma prática, entre outras, em diferentes momentos do processo formativo. (Santa Maria, 2019, p. 53)

O PPC aprofunda esta organização e define que “cada docente deverá propor, em seu planejamento semanal, estratégias de aplicação da recuperação paralela, dentre outras atividades, visando à aprendizagem dos estudantes” (Santa Rosa, 2021, p. 33). Dessa forma, o educador consegue perceber a evolução do aluno ao longo de todo o processo, considerando seu ponto de partida, assim como aponta Luckesi (2005, p. 174) como “um meio constante de fornecer suporte ao educando no seu processo de assimilação dos conteúdos e no seu processo de constituição de si mesmo como sujeito existencial e como cidadão”.

A aprovação do estudante nos componentes curriculares é atingida obtendo a média mínima nota 7,0 (sete), sendo que o primeiro semestre tem peso 6 (seis) e o segundo semestre tem peso 4 (quatro), antes do Exame Final, ou média mínima 5,0 (cinco) após o exame final, se necessário. Além disso, é necessário que o estudante tenha frequência mínima de 75% em cada disciplina. Com relação ao componente curricular de Matemática, cada professor distribui as provas e trabalhos como considerar melhor para o processo de aprendizagem. Segundo o Plano de Ensino da turma de 3º ano do Ensino Médio Técnico Integrado em Mecatrônica (MEI T2), turma na qual realizei o estágio, o professor regente distribui as notas a partir de três

avaliações (duas provas e um trabalho avaliativo) por semestre, com eventuais adaptações.

Durante o período da minha regência, fiquei responsável por avaliar 2,5 pontos para o segundo semestre, por meio de uma avaliação escrita individual. Para composição das notas também foram considerados os instrumentos subjetivos, como empenho, dedicação e evolução do aluno no decorrer das aulas.

3 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

A Educação Profissional, na etapa da Educação Básica brasileira, pressupõe “práticas educativas que preparem o sujeito de forma crítica e autônoma para as relações sociais e produtivas da sociedade atual” (Lima e Rios, 2019, p. 19). A educação, portanto, se volta para uma perspectiva de formação de cunho universal – humano, ético, político e técnico. E encontra na escola um saber estruturado na concepção de mundo como uma construção coletiva humana que ultrapassa os limites do tempo: “o existir, vivendo, é antes de tudo desdobrar-se pelo agir frente aos dados objetivos da natureza física, frente aos outros homens e frente às construções simbólicas das produções subjetivas” (Severino, 1994, p. 12).

A seção que segue relata a minha vivência em sala de aula, agora no papel de professora de Matemática de uma turma de Ensino Médio, na busca por oportunizar caminhos pelos quais os alunos possam aprofundar a sua leitura de mundo através dos conceitos, símbolos e significados próprios, para atuar na realidade e se perceber cidadão participativo. Para isso, reflexões são feitas acerca da Educação Matemática no campo de intervenção do estágio, considerando o planejamento, metodologias e recursos escolhidos; a caracterização da turma do estágio; os procedimentos didáticos metodológicos do estágio, relatando propriamente as práticas pedagógicas e, por fim; a relação teoria e prática na formação do professor, considerando a trajetória de constituição docente ao longo do curso para chegar, então, no Estágio Curricular Supervisionado IV.

3.1 A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO CAMPO DE INTERVENÇÃO DO ESTÁGIO

A Educação Matemática é o caminho pelo qual os alunos aprendem a ler o mundo por uma nova linguagem, progressivamente internalizando conceitos e transformando-os no mundo. Nesta etapa, o conhecimento é aliado ao diálogo e as diferentes percepções de mundo, e se entrelaça nas habilidades humanas de entender a si mesmo, o outro e o mundo. Da mesma forma, a matemática permite a construção de um sujeito cidadão, por meio de seus afazeres produtivos, economicamente e socialmente participativos. Ao ensinar matemática significa que estamos promovendo o saber, a inclusão e a qualidade de vida na sociedade em

que vivemos.

Nesse viés, a escolha dos métodos e recursos didáticos utilizados em sala de aula tem o poder de beneficiar a formação dos processos lógicos relacionados aos conceitos estudados. Documentos como o PDI (Santa Maria, 2019), PPC (Santa Rosa, 2021), e a BNCC (Brasil, 2017) apontam a necessidade de trazer para sala de aula a realidade dos alunos pensando, principalmente, na formação integral do cidadão. Destacam-se, também, habilidades que envolvam o uso de diferentes estratégias na resolução de problemas, como:

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, **recorrendo a estratégias diversas**, como o diagrama de árvore. (EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, **realizando contagem das possibilidades**, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade; (EM13MAT303) **Interpretar e comparar situações** que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso. (Brasil, 2017, p. 536-537, grifo nosso)

Com essa base, sabendo ser necessário utilizar de diferentes métodos e recursos em sala de aula, é importante refletir sobre o perfil da turma, que será abordado no tópico seguinte, e mais especificamente nas oportunidades e possibilidades que surgem dos conceitos trabalhados, no meu caso, Análise Combinatória, Probabilidade e Matemática Financeira.

Os livros didáticos foram a base no processo de construção das aulas, e referenciaram os conceitos e exercícios. “A linearidade contida no livro revela-se pelo destaque de uma sequência fortemente ordenada e encadeada, a qual tem servido de parâmetro para conduzir a aprendizagem nos estritos limites desse modelo” (Pais, 2006, p. 48). Com esta base, pude planejar as aulas buscando envolver os alunos e fazer a complementação com recursos didáticos.

No método Expositivo e Dialogado, o professor apresenta a base conceitual de forma organizada e clara, considerando a hierarquização dos conteúdos. Para haver sucesso, o diálogo deve ser constante entre alunos, professor e objeto de conhecimento, um “diálogo horizontal, respeitando os saberes dos educandos e buscando, junto com os alunos, a superação desses saberes” (Andreata, 2019, s.p.). Em meio ao diálogo, podem ser integrados, ainda, diferentes recursos didáticos concretos e/ou digitais. Nas práticas do estágio, esta metodologia serviu como base para o desenvolvimento de todos os conteúdos, desde a sua apresentação, até a

formalização dos conceitos e propostas de exercícios, tendo como apoio materiais como dados, baralhos, moedas e dinâmicas envolvendo os próprios alunos.

A Resolução de Problemas (Noguti; Onuchic, 2013) se caracteriza como uma metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação, pois os alunos são desafiados a articular seus conhecimentos prévios, tanto matemáticos quanto interpretativos, para resolver os problemas apresentados pelo professor. Pelos novos caminhos lógicos formados, surgirão novos conceitos, então formalizados pelo professor. Para o seu desenvolvimento, Onuchic e Allevato (*apud* Noguti; Onuchic, 2013) organizam a Resolução de Problemas em nove etapas: 1) preparação do problema; 2) leitura individual pelos alunos; 3) leitura em conjunto entre os grupos; 4) resolução do problema pelos grupos; 5) observar e incentivar os alunos; 6) registro das resoluções na lousa pelos grupos; 7) plenária; 8) busca do consenso; 9) formalização do conteúdo pelo professor. Assim, o conceito ganha significado e passa a fazer parte do imaginário matemático do aluno.

O método de Análise de Erros (Brum; Cury, 2013) também se fez presente desde os questionamentos realizados pelos alunos, perpassando as formas de registro e resolução dos exercícios, até o processo avaliativo escrito individual. Nesse método, os erros são classificados em: i) uso errado dos dados; ii) linguagem mal interpretada; iii) definição ou teorema distorcido; iv) erros técnicos; v) cópia dos dados; vi) erros não compreendidos; vii) erros por distração. Por meio dessa abordagem, observei quais os obstáculos gerados pelas lacunas matemáticas, e puder avaliar a evolução dos alunos de forma coerente, considerando toda a jornada até o final da minha regência.

3.2 A TURMA DO ESTÁGIO

A turma do 3º ano do Ensino Médio Técnico Integrado em Mecatrônica, no qual ocorreram as práticas pedagógicas do estágio, era composta por 35 alunos, sendo 13 meninas e 22 meninos. Na turma há dois alunos com Transtorno do Espectro Autista (TEA) de grau leve (os chamarei de aluno VM e aluno V, para fins de relato). Os alunos possuem uma boa convivência no geral, são participativos em aula e respeitosos. Porém, uma característica a destacar na turma são os momentos de conversa excessiva, observação consoante com o relato dos professores que atuam na turma e percebida pelos próprios alunos, como relatado no Conselho de Classe e

no formulário de *feedback* respondido: “A única parte negativa [das aulas] foi a conversa da turma”. Assim, é necessário que o professor saiba administrar o ritmo de aula para minimizar os momentos de pausa e, ainda assim, sempre chamar os alunos para que sua atenção volte ao assunto discutido.

Os alunos incluídos acompanham os conteúdos de aula, com algumas dificuldades pontuais. Ambos participam do AEE conforme as demandas. O aluno VM é bem comunicativo e participativo. Durante as aulas gostava de ajudar a distribuir os materiais impressos, realizava anotações e questionamentos. Seu hiperfoco é em gaita (Acordeon), o que faz com que participe em projetos extracurriculares do IFFar voltados à música, como o “Bandas do IFFar”, os quais realizam apresentações em eventos especiais no *Campus*.

O aluno V é mais direto na fala e muito literal em suas interpretações. Da mesma forma, sempre realizava anotações e questionamentos, principalmente nos momentos destinados para resolução de exercícios. Além disso, nos momentos de trabalho em grupo, preferia manter-se sozinho. Também participa do grupo de *Role-playing game* (RPG) do IFFar, assunto de seu interesse que surgiu em diversas conversas comigo, principalmente ao abordarmos o conteúdo de probabilidade com dados (ferramenta essencial nas jornadas de RPG).

Com relação à base matemática dos alunos, a turma apresenta características variadas. Enquanto há alunos medalhistas de Olimpíadas de Matemática, há também alunos com dificuldades em operações básicas. Ao longo das aulas, porém, devido ao caráter mais lógico do conteúdo, tais fatores não interferiram de forma tão significativa na aprendizagem dos conceitos, mas sim no desenvolvimento de cálculos como simplificação de frações. Por isso, nos momentos destinados à realização dos exercícios em sala, solicitei para a turma se organizar em grupos, beneficiando tanto os alunos quanto eu, professora, pois os próprios alunos se auxiliavam e era possível atendê-los nos grupos. Assim, o tempo foi bem usufruído pela maior parte dos alunos, com poucos momentos de distração.

Outra característica de destaque são as faltas recorrentes de alguns alunos, situação que dificulta o trabalho do professor em possibilitar a progressão gradual dos conceitos trabalhados. A relevância de considerar esse aspecto será descrita nos relatos que seguem.

3.3 OS PROCEDIMENTOS DIDÁTICOS METODOLÓGICOS DO ESTÁGIO

Neste item serão discutidas as experiências da regência de classe, com suas respectivas reflexões e análises. Os conteúdos desenvolvidos na regência de classe do Estágio Curricular Supervisionado IV foram Análise Combinatória, Probabilidade, Juros Simples e Juros Compostos. Para isso, foram utilizadas as metodologias de Resolução de Problemas, Atividade prática e Análise de Erros, bem como diferentes recursos e materiais didáticos, como baralho de cartas, dados, moedas e sistematização por mapa mental. O período de regência ocorreu entre os dias 05 de setembro e 07 de novembro de 2025, na turma de 3º ano do Ensino Médio Técnico Integrado em Mecatrônica, composta por 35 alunos. As aulas ocorreram semanalmente nos três primeiros períodos da manhã de sexta-feira, das 7h30 às 10h, sendo que cada período possui 50 minutos.

As escritas que seguem este tópico enfocam nos pontos considerados mais relevantes para o relato, análise e reflexão, por isso não englobam todos os planos de aula em sua totalidade. Para fins de consulta, os planos de aula referenciados poderão ser encontrados nos Apêndices deste trabalho. Ainda, é válido esclarecer que os relatos foram organizados em três partes: i) aulas referentes ao estudo da Análise Combinatória e Probabilidade; ii) avaliação – prova escrita; e iii) aulas referentes ao estudo dos Juros Simples e Compostos.

3.3.1 O Estudo da Análise Combinatória e Probabilidade

A primeira semana (Plano de Aula 1) teve, além do conteúdo programático, o propósito de diagnosticar os alunos com relação à sua base matemática a partir dos questionamentos realizados em aula e me familiarizar com o ritmo da turma. Os conteúdos abordados foram conceituais, com o estudo da Análise Combinatória a partir da resolução de uma situação-problema inicial, para então formalizar os princípios aditivos e multiplicativos da contagem, e o fatorial como uma nova operação.

Ao longo da aula, percebi que os alunos estavam considerando os exemplos e exercícios fáceis, o que se confirmou posteriormente quando uma aluna contou que eles já viram um pouco desse conteúdo em outro momento do curso em uma matéria técnica. Mesmo assim, os alunos fizeram questionamentos, inclusive acerca

do fatorial de zero ($0!$), permitindo que eu aprofunde o conhecimento pela teoria dos conjuntos e pelo modo de definir um fatorial pelo seu sucessor.

Outro questionamento foi com relação à simplificação de frações e a ideia de “colocar termos semelhantes em evidência”. Esta dúvida revelou uma lacuna de nível básico no aprendizado da turma, o qual precisei retomar diversas vezes ao longo das aulas. Nesse sentido, a formalização dos conceitos matemáticos se caracteriza como uma etapa essencial para o sequenciamento adequado dos conteúdos de maneira progressiva, e se relaciona aos aspectos afetivos e emocionais envolvidos na aprendizagem e domínio da matemática. Esse fator encontra-se com alguns dos critérios gerais para o ensino da matemática em uma perspectiva psicológica, sintetizados por Onrubia, Rochera e Barberà (2004, p. 334):

5. Avançar de maneira progressiva para níveis cada vez mais elevados de abstração e generalização;
7. Seqüenciar adequadamente os conteúdos matemáticos, assegurando a inter-relação entre as distintas capacidades envolvidas na aquisição do conhecimento matemático;
10. Dar atenção aos aspectos afetivos e motivacionais envolvidos na aprendizagem e no domínio da matemática; [...].

Este também pode ser um dos fatores desmotivadores para com a Matemática. Por isso, sempre busquei destinar pelo menos um período para resolução de exercícios. Para além de dinâmicas e atividades diferenciadas, a Matemática também é construída pelo treino e repetição. No caso da Análise Combinatória, a variedade de situações e interpretações é melhor explorada pela prática com exercícios. “O treinamento, aliado ao contato com problemas fora dos padrões, estimula o aluno a exercer suas faculdades de solução de problemas” (Brito, 2006, p. 49), e é a partir deles que se perceberá os padrões e como realizar as perguntas certas. Esse foi o meu foco considerando o objeto de conhecimento, a etapa de ensino e o tempo de aula disponível.

Ainda, o perfil da turma permite que eles aproveitem bem o tempo destinado aos exercícios em sala. Por meio do formulário de *feedback* recebi esta confirmação pelos próprios alunos, ao passo que 71% da turma afirmou que haver um tempo destinado para realização de exercícios em sala de aula favorece a construção do seu conhecimento. Um dos alunos relata: “gostei da maneira didática de explicação e do tempo destinado à realização dos exercícios em aula”.

Nas semanas seguintes (Plano de Aula 2 e 3), os conceitos de permutação,

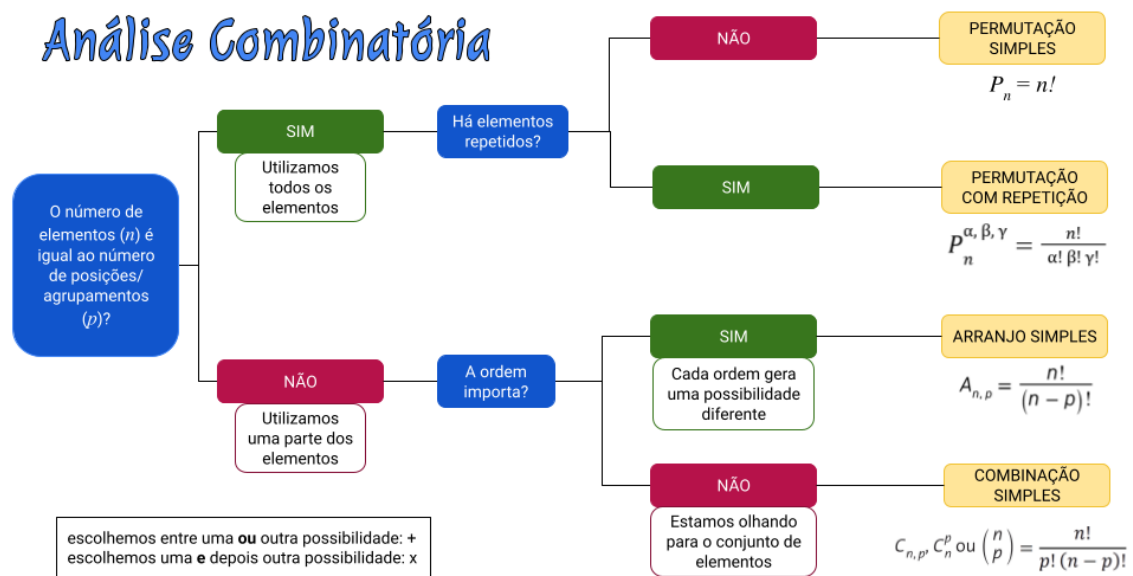
arranjo e combinação foram introduzidos a partir de dinâmicas envolvendo cadeiras e alguns alunos voluntários. Com os alunos e as cadeiras em frente ao quadro, eu realizava uma pergunta, por exemplo: de quantas maneiras os 3 alunos podem se sentar nas 3 cadeiras? E assim os alunos faziam as trocas e os colegas listavam as diferentes maneiras. O objetivo era que eles associassem estas situações iniciais com os conceitos vistos nas aulas, observando quais as diferenças entre cada caso: quantos são os elementos? Como estou agrupando? Estou usando todos? A ordem deles importa?

Em um primeiro momento, considerei que a proposta dessas dinâmicas não havia se efetivado, pois muitos alunos não realizavam a associação entre exemplo e conceito. No formulário de *feedback*, porém, alguns relatos se mostraram contrários à minha percepção: “É muito bom os exemplos práticos e atividades diferenciadas usando os colegas da sala” e “Adorei as dinâmicas iniciais que foram feitas para que começássemos a entender o conteúdo, facilitou muito na compreensão das aulas”. E com essa nova perspectiva percebo que, por mais que não tenha sido efetivo para todos, a atividade conseguiu possibilitar mais uma oportunidade de aprendizagem ao aluno. O papel do professor

[...] consiste muitas vezes em colocar o aluno na pista de uma aprendizagem possível. Certas aprendizagens são longas e, em um ano, nenhum aluno e nenhum professor podem fazer milagres. Mas se um pedaço do caminho já tiver sido feito, minha missão está cumprida. (Tardif, 2014, p. 88)

Ainda assim, havia dificuldades na turma com relação à interpretação dos enunciados para definir as técnicas de contagem utilizadas que precisavam ser abordadas. Buscando superar essa dificuldade, apresentei no quadro um diagrama para resolução dos exercícios. O diagrama era composto das etapas apresentadas na Figura 5, em que as perguntas norteadoras vão ao encontro das técnicas de contagem estudadas.

Figura 5: Diagrama em etapas com perguntas norteadoras para interpretação dos enunciados.



Fonte: A Autora (2025).

Refletindo sobre as observações feitas acerca das aulas, percebo como a forma de avaliação prevista me permitiu conhecer melhor os alunos. A partir da resolução dos exemplos, e principalmente dos exercícios, ficou claro em quais pontos eles apresentavam dificuldades e quais conceitos eu precisaria retomar, afinal “avaliar um aluno com dificuldades é criar a base do modo de como incluí-lo dentro do círculo da aprendizagem” (Luckesi, 2005, p. 173).

Outro aspecto interessante a ser abordado retorna às características da turma. Em um momento de conversa após a aula, o professor regente sugeriu para que eu “ignorasse” as respostas do aluno MM. Acontece que este aluno possui grande facilidade em matemática, e tende a responder às perguntas com prontidão. Já os colegas nem sempre conseguem acompanhar o seu ritmo, por isso a necessidade de “criar mais tempo” para que todos acompanhem o raciocínio. Para isso, o professor sugeriu que questionasse o porquê daquela resposta e como chegar em tal resultado. Por se tratar de uma sala de aula com grande número de alunos, é natural encontrarmos alunos com maior facilidade em matemática e, ao mesmo tempo, alunos com dificuldades desde a base. E ao exigir que os alunos se nivelem, “a escola consegue dois prejuízos educacionais: o fracasso daqueles que não possuem as habilidades exigidas e o não desenvolvimento das habilidades possuídas” (Lorenzato, 2010, p. 35).

Nesse sentido, torna-se um desafio para o professor conseguir mediar as diferenças e potencializar a aprendizagem de cada um em suas necessidades e individualidade. Utilizando da estratégia proposta pelo professor regente, o aluno em questão tem a chance de compartilhar seu conhecimento, bem como os colegas conseguem assimilar a informação. Tais sugestões foram positivas em me ajudar a visualizar melhor as relações em sala de aula e aprender como adaptar as situações para a diversidade de sujeitos.

O último período da terceira aula foi destinado para uma lista com 5 questões para serem resolvidas em sala de aula, de forma individual, com consulta ao material e sem o uso de calculadora. A atividade não valia nota, e tinha como objetivo orientar a prática pedagógica e servir como base para os alunos entenderem os seus pontos fracos. Os alunos acharam mais difícil realizar os cálculos sem calculadora e, como não poderiam usá-la na prova, estabeleci esta regra justamente para eles observarem a importância de simplificar as operações o máximo possível para facilitar o cálculo. O resultado expresso na Quadro 1 a seguir considera o número de acertos, sendo no total 5 questões e considerando 3 como a média. Os alunos sem nota faltaram a aula.

Quadro 1: Resultado da atividade com 5 questões.

ALUNO	Questões certas de 5	ALUNO	Questões certas de 5
A	4,0	J	3,5
AE	0,5	K	-
AK	3,0	L	2,0
B	3,5	LN	3,0
BR	5,0	LG	-
C	3,0	LP	-
CE	3,0	M	2,0
D	2,0	MS	3,5
E	2,5	ME	2,0
EL	1,0	MM	5,0
F	3,0	N	3,0
G	4,0	S	3,0
GG	-	SW	2,0
GH	2,5	T	4,0
GO	4,0	V	3,5
H	4,0	VD	3,5
HM	3,0	VM	2,0
I	2,5	Média da turma	2,98

Fonte: A Autora (2025).

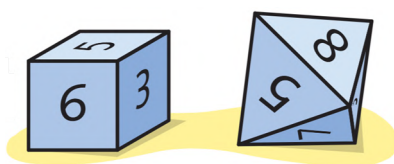
A principal dificuldade foi na interpretação e escolha da técnica de contagem para resolver o problema. Ao longo da atividade percebi que o diagrama de sistematização auxiliou os alunos, visto que muitos o consultaram para resolver as questões. Muitos alunos também passaram a responder às perguntas como parte do desenvolvimento da questão, então considero que a proposta cumpriu o seu objetivo.

Já na quarta semana (Plano de Aula 4), o foco principal foi a construção dos conceitos iniciais de probabilidade, tendo como base os experimentos aleatórios com um dado, um baralho e uma moeda. Com os objetos em mãos, os alunos foram desafiados a afirmar qual face da moeda iria cair, qual número do dado iria cair e qual seria o naipe da carta sorteada. Com esta dinâmica, a turma conseguiu visualizar o conceito na prática, para depois formalizá-lo matematicamente.

Durante o período destinado à resolução dos exercícios, os alunos trabalharam em grupos e desenvolveram boa parte da lista. As principais discussões surgiram na questão 3 (Figura 6), que tratava do lançamento de dois dados com números de lados distintos. A questão foi pensada propositalmente, considerando que eles desenvolvem os exercícios em sala, para explorarmos em conjunto um tipo diferente de montagem do espaço amostral.

Figura 6: Questão 3 sobre o lançamento de dois dados.

3. Foram lançados simultaneamente dois dados: um no formato de cubo com as faces numeradas de 1 a 6; outro no formato de octaedro regular com as faces numeradas de 1 a 8.



Qual é a probabilidade de:

- a) o mesmo número ser sorteado nos dois dados?
- b) a soma dos números ser maior do que 10?
- c) o produto dos números ser 6?
- d) os dois números serem ímpares?
- e) os números 4 e 6 não serem sorteados?

Fonte: Andrade (2020).

Neste caso, o espaço amostral, ou seja, todos os resultados possíveis para o lançamento simultâneo dos dois dados, é composto por pares ordenados, formados pelos lados de cada dado. Por se tratar de um espaço amostral grande, sugeri que

montassem um quadro para sistematizar as possibilidades. Até que, nas letras D e E, os alunos encontraram uma forma mais fácil para chegar na resposta sem a necessidade de listar as possibilidades: em cada lado, basta descartar aquilo que se pede e multiplicar os lados restantes para encontrar o número de casos favoráveis. Quando tomei conhecimento disso, ao me questionarem sobre a validade da solução, foi satisfatório perceber os alunos trabalhando em grupo e se desafiando a explorar a matemática de forma a facilitar a resolução de problemas.

Como já relatei anteriormente, a turma costuma aproveitar muito bem o tempo em sala para realização dos exercícios. Por isso, durante a quinta semana (Plano de Aula 5), a aula foi destinada para revisão dos conceitos de Análise Combinatória e Probabilidade por meio de uma lista de atividades. Todos participaram ativamente, e pude sanar muitas dúvidas de forma individual, fator que contribuiu para os alunos com mais dificuldades e que preferem esse tipo de atendimento (Figura 7).

Figura 7: Alunos realizando a lista de exercícios de revisão dos conceitos.



Fonte: A Autora (2025).

Junto disso, me surpreendi ao ver em sala um aluno que estava sem vir há 3 semanas (participou somente da primeira aula). Ele não justificou as suas faltas, mas conversou comigo falando que sabia da sua responsabilidade e que estava estudando para recuperar o conteúdo. O seu tempo em aula foi muito proveitoso, sanou várias dúvidas e aproveitou da ajuda das colegas para estudar as listas anteriores. Também indiquei que ele viesse na Monitoria de Matemática no contraturno, o que não se efetivou, porém “nada nem ninguém pode forçar um aluno a aprender se ele mesmo não se empenhar no processo de aprendizagem” (Tardif, 2014, p. 132).

3.3.2 A Avaliação – prova escrita

Como parte do período de regência do estágio, fiquei responsável por avaliar 2,5 pontos para o segundo semestre, destinados à realização de uma prova sobre Análise Combinatória e Probabilidade. Para composição das notas também foram considerados os instrumentos subjetivos de avaliação, como o empenho, dedicação, comprometimento e evolução do aluno no decorrer das aulas.

A avaliação (prova escrita) sobre Análise Combinatória e Probabilidade (Plano de Aula 6) foi elaborada em consonância das atividades propostas em sala de aula. O objetivo central da prova escrita era avaliar a capacidade interpretativa dos alunos para definir como resolver a questão. Isto envolvia saber o que observar no enunciado e o que diferenciava cada uma das técnicas de contagem estudadas. Por isso, considerando não intervir nos aspectos a serem avaliados, disponibilizei as fórmulas de Análise Combinatória no quadro.

Seguindo o método de Análise de Erros de Brum e Cury (2013), analiso aqui os principais erros cometidos pelos alunos na avaliação escrita. As sete classes de erros consideradas para essa análise são: i) uso errado dos dados; ii) linguagem mal interpretada; iii) definição ou teorema distorcido; iv) erros técnicos; v) cópia dos dados; vi) erros não compreendidos; vii) erros por distração.

A questão com o maior índice de erros solicitava a simplificação de uma expressão matemática com fatoriais (Figura 8). O erro comum à maior parte dos alunos ocorreu no momento de simplificar a fração, classificando-se como um *erro técnico*.

Figura 8: Erro técnico na simplificação de fração.

Handwritten mathematical work showing several errors in simplifying fractions involving factorials. The work includes multiple attempts at simplifying $\frac{(n+2)!}{n! + (n+1)!}$ and other similar expressions, with some steps being crossed out or corrected.

Fonte: A Autora (2025).

Neste caso, os alunos deveriam encontrar um fatorial comum nos três termos da fração, para então poder simplificá-los. Porém, a maioria dos alunos desconsiderou a soma no denominador e simplificou somente dois termos de forma equivocada. Considerando ser alunos do 3º ano do Ensino Médio, acredito que isso deve-se à falta de prática, visto que as dúvidas nas operações com frações, principalmente quando há soma ou subtração no denominador e/ou numerador, apareceram com frequência no desenvolvimento das aulas.

Nesta mesma questão também houve casos de *erro por distração*, como na Figura 9, em que o aluno soube trabalhar com a técnica de simplificação, porém transcreveu somente parte da questão para a folha de desenvolvimento dos cálculos.

Figura 9: Erro por distração na transcrição da questão 2.

Handwritten mathematical work for question 2, showing a simplification of $n! + (n+1)! = n!(1 + n+1) = n!(n+2)$. The final answer is given as $n!(n+2)$, with a note "faltou o restante da fração" (the rest of the fraction was missing).

Fonte: A Autora (2025).

Casos similares ocorreram em outras questões. Na Figura 10, o aluno simplificou a fração, mas ao continuar o cálculo adicionou o zero novamente,

provavelmente por não ter sinalizado com clareza anteriormente. Em outra questão, outro aluno deixou um termo para trás na sua resolução.

Figura 10: Erro por distração na simplificação de fração.

I. $\frac{300}{400} = \frac{3}{4}$ Vdd.

II. $\frac{160}{400} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$ *cuidado ao simplificar*

III. $\frac{240}{400} = \frac{3}{4}$ Vdd

IV. $\frac{340}{400} = \frac{17}{20}$ Vdd

6. $\frac{9!}{4! 3! 2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 252$ maneira

Fonte: A Autora (2025).

Da mesma forma, há os *erros por distração* com relação às operações básicas, principalmente multiplicação. A Figura 11 mostra os erros de uma aluna em sua prova, onde utilizou os conceitos e estruturou os cálculos corretamente, porém se equivocou em diversas multiplicações apresentadas na folha de rascunho.

Figura 11: Erro por distração em contas de multiplicação.

1º $\frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 282$ formas distintas dentro 8 competidores ocuparem em 3 posições, pois mesmo que selecionarmos A, B, C se eles estiverem nessa ordem e escolherem B, A, C terão posições distintas e colocações diferentes.

3º $\frac{8!}{3! 5!} = \frac{8!}{3! 5!} = 282$ formas diferentes de fazer os triângulos sem se repetir nos 3 pontos.

6º $\frac{9!}{4! 3! 2!} = \frac{9!}{4! 3! 2!} = 315$ formas distintas

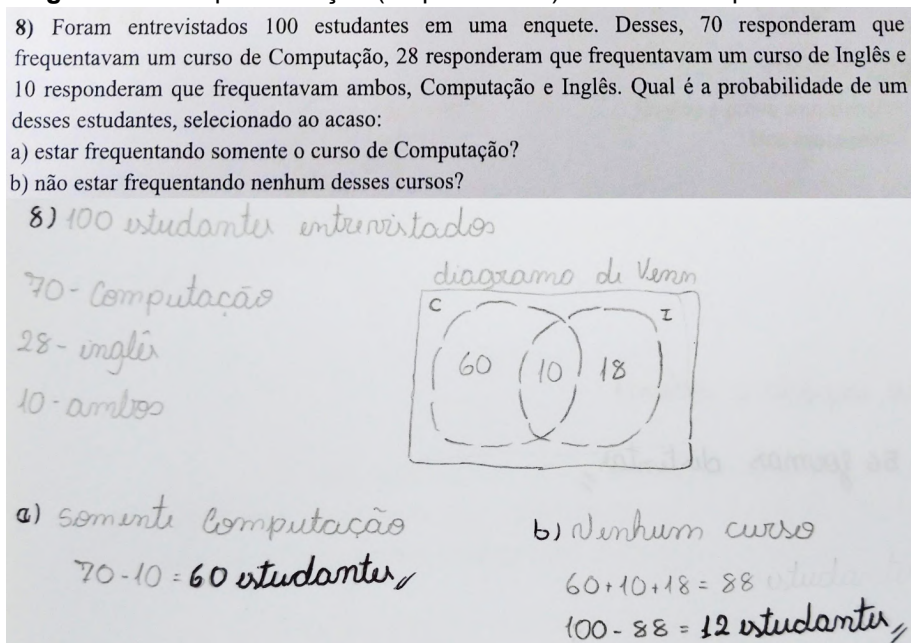
Fonte: A Autora (2025).

Aqui considero como *erros por distração* pois foram percebidos pela própria aluna ao conversar comigo posteriormente, e pelo desenvolvimento apresentado nos

rascunhos. Além disso, ela não cometia tais erros ao resolver os exercícios em sala de aula.

A distração também ocorre pela leitura rápida do enunciado, em que o aluno pode resolver corretamente a questão, mas não indicar a resposta corretamente. Este é o caso da Figura 12, onde o aluno encontrou a quantidade de alunos correspondente a cada alternativa, mas não indicou a probabilidade relacionada aos valores, como solicitava a questão.

Figura 12: Erro por distração (esquecimento) no cálculo da probabilidade.



Fonte: A Autora (2025).

A Figura 13 apresenta os *erros por distração* de um aluno na questão 5. Com a leitura rápida, ele não se atentou a uma parte importante do enunciado: os algarismos que formam o número devem ser distintos. Abaixo, ainda na mesma questão, uma aluna, ao transcrever os algarismos pares para a sua folha de resolução, adiciona dois algarismos não indicados no enunciado. Pode-se dizer que além do *erro por distração* houve *erro na cópia dos dados*.

Figura 13: Erro por distração e/ou cópia de dados na avaliação.

- 5) Considere os números de seis algarismos distintos, formados pelos algarismos 3, 4, 5, 7, 8 e 9.
a) Quantos números é possível formar?
b) Desses números, quantos são pares?

S1 $\underbrace{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}_{\text{números (caso possam ser repetidos)}} = 53136$

a) 53136

b1 $\underbrace{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}_{\text{números (caso possam ser repetidos)}} \cdot 2 = 17712$

b) Desses qts são pares? 360

pl ser par n pode terminar em número ímpar, no caso de quatro, os outros de ímpar (4 n podem ser como último algarismo do n° não: 5, 9, 3.

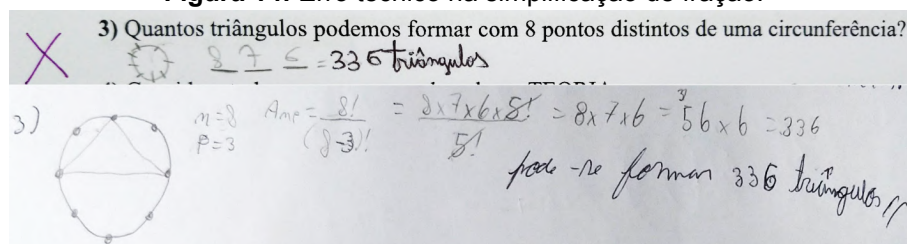
9, 5 e 3 $\rightarrow$ ímpares
(6) 4 (2) $\rightarrow$ pares
 $pn = 3! \rightarrow 6$

Fonte: A Autora (2025).

Os *erros por definição ou teorema distorcidos* apareceram com frequência e caracterizam-se por erros ligados diretamente àquilo que está sendo avaliado. É possível dizer que nesses casos o erro aconteceu pois os alunos não conseguiram compreender os conceitos estudados, principalmente o que caracteriza cada técnica de contagem da Análise Combinatória, aliado à dificuldade na interpretação dos enunciados.

A questão 3, por exemplo, se tratava de uma combinação simples, pois a ordem em que escolhemos os pontos não importa já que, definidos três pontos, eles sempre formarão o mesmo triângulo. Na Figura 14 é possível observar que ambos os alunos consideraram que a ordem dos pontos importa, portanto, usaram do Princípio Fundamental da Contagem e o arranjo simples para resolver a questão.

Figura 14: Erro técnico na simplificação de fração.



Fonte: A Autora (2025).

Diferentemente dos outros casos, o aluno C havia marcado a alternativa correta na questão 9 (Figura 15), porém a resolução apresentada não condizia com a alternativa marcada, seu resultado apontava para outra alternativa. Este erro foi classificado como *erro não compreendido*.

Figura 15: Erro não compreendido - divergência entre alternativa marcada e resolução apresentada.

9) (UFRGS 2020) Um jogador, ao marcar números em um cartão de aposta, como o representado na figura abaixo, decidiu utilizar apenas seis números primos.

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

A probabilidade de que os seis números sorteados no cartão premiado sejam todos números primos é

~~A) $\frac{C_{17,6}}{C_{60,6}}$~~ B) $\frac{1}{C_{60,6}}$ C) $\frac{C_{60,6}}{C_{17,6}}$ D) $\frac{A_{17,6}}{A_{60,6}}$ E) $\frac{A_{60,6}}{A_{17,6}}$

Handwritten solution (g):

60, 17 $\frac{60!}{(60-17)!} \rightarrow \frac{60!}{43!} \rightarrow$ possibilidades

Resultados favoráveis = $\frac{17!}{(17-6)!} \rightarrow \frac{17!}{11!}$ ou $A_{17,6}$

possibilidades totais = $\frac{60!}{(60-6)!} \rightarrow \frac{60!}{54!}$ ou $A_{60,6}$

alternativa A

Fonte: A Autora (2025).

Sem entender, o aluno me perguntou o porquê. Os argumentos, neste caso, são normalmente relacionados ao fato de que “no vestibular a questão estaria certa”. De fato estaria, porém, meu objetivo em sala de aula era avaliar o raciocínio que o

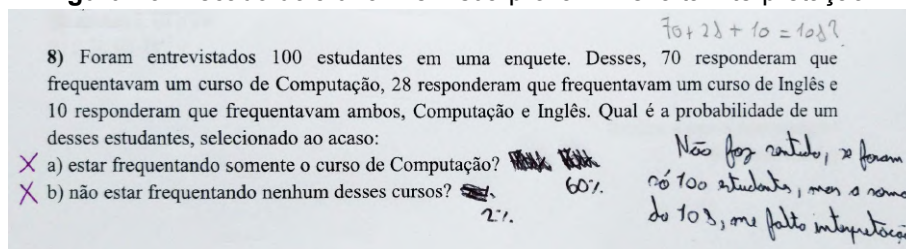
aluno seguiu para solucionar o problema, e assim saber se a aprendizagem se efetivou. Lorenzato define a subjetividade de quando o acerto nem sempre é resultado de compreensão:

Devido à relatividade do simples, do evidente e do acerto, torna-se altamente recomendável que os alunos verbalizem o que estão vendo, fazendo ou pensando, para que o professor possa constatar o tipo de aprendizagem que está acontecendo. (Lorenzato, 2010, p. 42)

Ao final, mesmo explicando para o aluno, este não saiu satisfeito.

Em outra situação, o aluno D indica em sua resposta que lhe faltava interpretação (Figura 16). Este aluno estava com baixo rendimento ao longo do ano devido a problemas pessoais, e em conversa me disse estar tentando “voltar aos trilhos”. Isto evidenciou-se pelo encontro com o pai do aluno na Reunião de Pais, e também pelo seu empenho crescente ao longo das aulas.

Figura 16: Recado do aluno D em sua prova - “me falta interpretação”.



Fonte: A Autora (2025).

Sua sinceridade expressa um senso de responsabilidade. Bouffleuer (2000) reflete sobre esta “situação pedagógica” ao afirmar que “a dialética pedagógica configura-se aí exatamente pelo fato de educadores e educandos se disporem a rever suas posições e percepções em função da interação estabelecida” (p. 12). Quando o aluno entende que sua aprendizagem não depende somente do professor, mas é um trabalho conjunto e contínuo.

Em aspectos gerais, também cabe dizer que alguns alunos não organizavam suas resoluções, mesmo após eu ter enfatizado diversas vezes em sala. A dificuldade se concentrava principalmente em verbalizar e estruturar o pensamento no papel, para explicitar qual foi a lógica utilizada na resolução do exercício que justificasse a resposta obtida. Isto não só dificulta a correção e o entendimento do raciocínio, mas pode dificultar a construção da aprendizagem estruturada de cada conceito. Além disso, quanto melhor sistematizar a resolução, menores são as

chances de cometer *erros por distração*, por exemplo.

Como sistematização, a relação de notas da prova por aluno, bem como a média da turma, são apresentadas no Quadro 2. Para parametrizar a análise é preciso considerar a média como 70%, ou seja, 1,8 pontos. Dos 35 alunos, 21 alunos atingiram notas acima da média (marcadas em verde no quadro) e 4 atingiram a média (marcadas em laranja).

Quadro 2: Relação de notas da prova sobre Análise Combinatória e Probabilidade.

ALUNO	Prova (2,5 pontos)	ALUNO	Prova (2,5 pontos)
A	2,0	J	2,1
AE	1,8	K	1,4
AK	1,4	L	1,1
B	1,1	LN	2,3
BR	2,5	LG	2,2
C	1,8	LP	2,3
CE	1,8	M	2,3
D	1,3	MS	1,6
E	0,9	ME	1,6
EL	2,0	MM	2,5
F	2,5	N	2,0
G	2,1	S	2,1
GG	1,9	SW	1,4
GH	1,8	T	2,3
GO	2,0	V	1,0
H	2,3	VD	1,9
HM	2,1	VM	2,1
I	2,1	Média da turma	1,9

Fonte: A Autora (2025).

Considero que os resultados refletiram a realidade das aulas e, para além dos fatores variáveis relacionados à minha prática pedagógica, o comprometimento dos alunos com seus estudos. Isso é reconhecido pelos próprios alunos no formulário de *feedback*, ao serem questionados como avaliavam a sua participação, comprometimento e desempenho nas aulas. As respostas positivas destacaram o estudo para além da sala de aula, ajuda aos colegas e realização das atividades: “Eu tentei me esforçar ao máximo, mesmo tendo dificuldade em matemática”; “Sou bem comprometida, me dedico ao máximo”. Por outro lado, muitos refletiram sobre

as faltas frequentes, pouca participação e empenho: “Tento fazer o melhor para auxiliar na aula e entender a matéria. Peco em fazer as atividades de casa, mas tento não atrapalhar a aula”; “Pouca participação e desempenho regular”; “Baixa, uma vez que compareci poucas vezes. Mas as poucas vezes que compareci, eu tive um bom aprendizado. Além disso, a professora havia guardado as atividades dos dias que não compareci e posterior me entregado impresso, o que me ajudou consideravelmente para o meu aprendizado (fiz questão de fazer todas as atividades até o dia da prova)”.

3.3.3 O Estudo dos Juros Simples e Compostos

A estrutura das aulas de Matemática Financeira ocorreram de forma similar ao conteúdo explorado anteriormente. O objetivo era revisar os conceitos de juros simples e compostos, como já visto no Ensino Fundamental, e aprofundar com a análise de taxas e comportamento de funções.

A primeira aula (Plano de Aula 7) ocorreu após a prova do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), por isso os alunos estavam cansados e distraídos. Não foi possível atender todos os objetivos propostos no plano, pois algumas mudanças ocorreram com relação ao planejamento inicial, considerando o contexto pós-prova e o tempo de aula restante.

Assim, iniciei trabalhando os conceitos de juros e juros simples. Para isso, os *slides* foram utilizados como recursos tecnológicos para apoio, na mesma sequência do material impresso entregue aos alunos. Optei por trazer novamente o material impresso, pois considero que contribuiu para a organização e acompanhamento dos alunos. Isto se confirmou através do formulário de *feedback*, em que 83,9% dos alunos afirmou que o material impresso favorece na construção do seu conhecimento. Analisando posteriormente, percebo que apressei a explicação dos conceitos tentando aproveitar ao máximo o pouco de disposição que ainda lhes restava. Afinal, tentei chamar a atenção de volta para o quadro com questionamentos, mas sem muito sucesso. Outro fator complementar para esta distração pode ser o próprio conteúdo, por se tratar de algo conhecido pela maioria e sem um nível alto de complexidade.

A análise do gráfico de juros simples por meio de uma função do primeiro grau foi o momento de maior atenção, participação e discussão da aula. Nele, os alunos

se sentiram desafiados a responder os meus questionamentos acerca de como poderíamos escrever esta função a partir dos seus termos. Ao final, devido ao tempo, propus que os alunos tentassem definir o mesmo gráfico por meio de uma Progressão Aritmética em seus estudos pessoais.

Como finalização, além da lista de exercícios, entreguei as provas e sanei as dúvidas referentes à correção, dando um panorama aos alunos sobre o desempenho da turma. Percebendo que a aula não rendeu como o esperado, considerando que alguns alunos saem mais cedo devido ao transporte e que os minutos finais destinados aos exercícios não estavam sendo bem aproveitados, optei por liberá-los alguns minutos antes para casa.

Refletindo sobre as aulas anteriores e comparando-as com esta, deixei a sala de aula com a sensação de que meu dever não foi cumprido da melhor forma, pois percebi que alguns alunos não conseguiram acompanhar o ritmo. Ao mesmo tempo, também entendo o contexto que acarretou tal resultado, e que foram necessárias adaptações na hora. Isto se encontra ao pensamento de Vasconcellos (2006, p. 159), quando reflete que o planejamento

não pode se tornar uma camisa de força, obrigando o professor a realizá-lo mesmo que as circunstâncias tenham mudado radicalmente, mas isto também não pode significar que por qualquer coisa o professor estará desprezando o que foi planejado.

Buscando suprir as oportunidades de aprendizagem, me coloquei à disposição para tirar dúvidas em horário fora de aula por meio de *e-mail*, e na aula seguinte corriji os exercícios solicitados pelos alunos, bem como retomei o juro simples antes de iniciar o novo conteúdo.

Em contrapartida, a segunda e última aula (Plano de Aula 8) foi marcada por uma experiência diferente. No início da aula o professor regente encaminhou algumas orientações para as próximas semanas, visto que este era o meu último dia de estágio e a programação da turma seguia com prova e apresentação de trabalhos. Novamente, um pequeno grupo de alunos estavam mais distraídos devido a algumas interrupções e recados ao longo da aula acerca de uma viagem técnica, e também por entregas de presentes para uma aluna que estava de aniversário. Por isso, precisei chamar a atenção de volta à aula com frequência. Mesmo assim, em âmbito geral, a turma estava disposta e participativa.

Nesta aula, exploramos os conceitos de juros compostos desde a dedução da

fórmula, perpassando os quatro cálculos clássicos até a conversão das taxas equivalentes. Por se tratar de cálculos envolvendo potências e raízes com índice diferente de 2 e logaritmo, solicitei que todos me acompanhassem com a calculadora, assim conseguiriam identificar dúvidas com relação ao seu uso para serem tratadas em aula.

Dos exemplos desenvolvidos surgiram duas dúvidas que trago em destaque. No primeiro exemplo, em que é preciso calcular os juros acumulados naquele período sobre regime composto, utilizamos a fórmula para descobrir o montante: $M = C(1 + i)^t$. Para descobrir os juros, precisamos subtrair o capital inicial do montante acumulado. Um dos alunos perguntou, então, se não bastava calcular $(1 + i)^t$ para descobrir os juros, associando à ideia do juro simples. Antes de responder, pedi para que ele realizasse o cálculo na calculadora para conferir o resultado, percebendo por conta própria o seu erro. Observando que o cálculo não gerou o mesmo resultado, seu colega explica que é necessário multiplicar por pelo capital inicial, pois é em cima dele que o juro é calculado. Fiquei satisfeita com o resultado desse processo, pois consegui partir de uma dúvida e mediar para que eles investigassem e chegassem a uma conclusão por conta própria. Afinal, o experimentar é próprio do ser humano.

Ao tratarmos do cálculo do período com logaritmo também surgiram questões acerca do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), afinal, como resolver tal questão sem a calculadora? Expliquei que há duas possibilidades: ou a questão tratará das propriedades dos logaritmos, ou dará os valores necessários para fazer a substituição dos termos. Ainda indiquei na lista de exercícios uma questão do ENEM que trabalha justamente desta forma, e com isso muitos optaram por realizá-la primeiro. Questionamentos desse tipo se tornaram mais frequentes ao longo das aulas, visto que o foco dos alunos se concentrava na prova que se aproxima e nas preocupações com as próximas etapas de vida.

Sobre as aulas desenvolvidas, um dos alunos relata: “As explicações foram muito boas e a professora foi muito atenciosa ao sempre sanar as dúvidas que apareciam, o material impresso ajudou bastante e os exemplos das aulas também”, enquanto outro considera: “Positiva: a professora foi muito compreensiva com as dificuldades dos alunos. Negativa: Faltou a profe chamar mais os alunos para não conversar e manterem a paz”. Como relatado em diversos momentos, os alunos destacam que eram feitas “várias perguntas, para nos manter focados na aula” e

que “quando haviam dúvidas, ela incentivava nós a explicar o que tínhamos entendido da questão/conteúdo para, assim, resolver e solucionar a dúvida”. Reações mistas acerca do uso de *slides* apareceram no *feedback*, com apenas 38,7% da turma afirmando “gostar muito”, explicitando a importância de buscar ouvir os alunos para encontrar um meio-termo entre a prática pedagógica do professor e a preferência dos alunos, beneficiando ambos os lados.

3.4 A RELAÇÃO TEORIA E PRÁTICA NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR

A base teórica formada enquanto cursamos a Licenciatura é necessária para que o pensamento crítico se construa com intencionalidade e propriedade. Como uma reta coincidente, e não paralela, a prática forma o nosso repertório experimental para sabermos atuar na realidade que estamos inseridos. O caminho segue indefinidamente, construindo um professor apto a aprender, ensinar, pensar sobre o que ensina, como ensina e porque ensina.

Os saberes da experiência podem ser melhorados, em qualidade e em quantidade, se o professor se habilitar a refletir sobre sua prática docente e, até mesmo, a registrar os principais momentos de suas aulas; afinal, estas são ricas em dificuldades, perguntas interessantes, conflitos, propostas, atitudes e soluções inesperadas. (Lorenzato, 2010, p. 10)

Ao seguir para o estágio supervisionado, minha preocupação era novamente a condução da turma. Os conceitos estudados eram desafiadores, mas imaginar dar aula para alunos com idade próxima a minha era uma preocupação maior: “eles irão me enxergar como professora?”. Além disso, por ser uma turma com 35 alunos, conseguir mediar o ritmo de cada um também configurou um desafio, pois as características individuais se destacaram, e as personalidades evidenciaram a construção de sujeitos que se preparam para o mundo além da escola:

Durante as aulas, os alunos se exprimem através da fala, da escrita, do olhar, de gestos; eles apresentam perguntas ou soluções, cometem erros, mostram suas dificuldades, constroem raciocínios e, dessa forma, revelam seus vocabulários, interpretações, sugestões, preferências, tendências, potencialidades, expectativas, insatisfações, temores, crenças e bloqueios (Lorenzato, 2010, p. 16)

Para minha satisfação, acredito ter construído uma boa relação com a turma e um ambiente propício para aprendizagem. Permitindo que os alunos se sentissem à

vontade para questionar, conversar, compartilhar suas dificuldades, expressar suas ideias e ser sincero com sua própria aprendizagem. O momento que melhor representa isso partiu de uma aluna que, em meio a prova, mesmo com dificuldades acerca do conteúdo, veio ao meu encontro para falar que gostava muito das minhas aulas, e que conseguia entender o que eu explicava.

Porém, ao longo do processo também houve frustrações. A falta de comprometimento e o desinteresse, por vezes demonstrado por alguns alunos, evidenciam como o conhecimento só é construído de fato quando o próprio aluno assume a responsabilidade pelo aprender. O melhor que o professor pode fazer é ser um facilitador, oportunizar e incentivar, o que transparece tanto pelo planejamento, quanto pela condução em sala de aula, por demonstrar se importar e por demonstrar conhecer. Da mesma forma, perceber aqueles alunos empenhados se frustrando com o próprio desempenho reforça o quanto devemos enfatizar para cada um o seu crescimento e evolução ao longo do processo, mesmo que quantitativamente não signifique tanto.

Por fim, entendo que se constituir docente é se constituir em sua própria existência, pois o “ser professor” não ocorre somente quando se está em sala de aula, mas sempre no viver. Desta vivência levo felicidades, frustrações, melhorias, novas ideias, e tudo aquilo mais que um professor deve levar da sua prática em sala de aula.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ensinar Matemática, agora no Ensino Médio, significa oportunizar caminhos pelos quais os alunos possam aprofundar a sua leitura de mundo através dos conceitos, símbolos e significados próprios, para atuar na realidade. Nos sujeitos e lugares onde a educação se constitui, o professor encontra subsídio para atribuir significado ao conhecimento para o seu aluno através da ação pedagógica. E o conhecimento é aliado ao diálogo e as diferentes percepções de mundo, e se entrelaça nas habilidades humanas de entender a si, o outro e o mundo.

Ao final desta etapa, pude ter uma nova perspectiva sobre o meu “eu professora”, e me percebo cada vez mais como os Jequitibás de Rubem Alves. Parte disso deve-se ao meu crescimento, resultado das orientações dos meus professores formadores ao longo do processo. Agora, após dois estágios, me sinto mais confiante sobre a minha capacidade para assumir esse papel, encarar os desafios e passar pelas frustrações. Apresentar a matemática como um conhecimento intrinsecamente humano, mesmo que não-idealizado quando tratamos de sala de aula, me alegra, pois é como eu a vejo e entendo.

Com esse relatório, espero ter proporcionado uma perspectiva acerca de como o licenciando pensa as suas próprias práticas pedagógicas, o ser docente e a sua relação com o conhecimento. Bem como as percepções individuais influenciam as relações estabelecidas no cotidiano escolar, e encontra na escola um saber estruturado na concepção de mundo como uma construção coletiva humana que ultrapassa os limites do tempo. A completude da formação nunca chegará, mas mais próximo estará quem reflete e analisa o processo de mediar a relação do aluno com o conhecimento, como propõe o Estágio Curricular Supervisionado IV.

REFERÊNCIAS

- ANDRADE, T. M. [org.] **Matemática interligada: estatística, análise combinatória e probabilidade** / obra coletiva; editora responsável. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020.
- ANDREATA, M. A. **Aula expositiva e Paulo Freire**. Ensino em Re-Vista, Uberlândia, v. 26, n. 3, p. 700-724, set. 2019. Disponível em: <http://educa.fcc.org.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1983-17302019000300700&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em: 19 dez. 2024.
- BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. **Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional**. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 23 dez. 1996. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm>.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular: educação é a base**. Brasília, 2017.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/SEB, 2006.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos: apresentação dos temas transversais** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. 436 p.
- BRITO, M. F. R. **Solução de problemas e a matemática escolar**. Campinas, SP: Editora Alínea, 2006.
- BRUM, L. D., CURY, H. N. **Análise de erros em soluções de questões de Álgebra: uma pesquisa com alunos do Ensino Fundamental**. REnCiMa, v.4, n.1, p. 45-62, jan./jun. 2013.
- BOUFLEUER, J. P. **O operar pedagógico sob o primado da comunicação: a pedagogia em perspectiva auto-fundante**. GT: Filosofia da Educação, n. 17, p. 1-15. 2000.
- IBGE – INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Censo Brasileiro de 2022**. Rio de Janeiro: IBGE, 2023.
- LIMA, S. E. A.; RIOS, J. A. **Trabalho, Educação, Ciência e Tecnologia como Categorias Indissociáveis à Integração entre o Ensino Médio e a Educação Profissional**. Ensino em Foco, Salvador, v. 2, n. 5, p. 9-20, set. 2019.
- LORENZATO, S. **Para aprender matemática**. 3. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2010.
- LUCKESI, C. C. **Avaliação da Aprendizagem Escolar: um ato amoroso**. In: LUCKESI, C. C. Avaliação da aprendizagem escolar: estudos e proposições. 17. ed. São Paulo: Cortez, 2005. cap. 9, p. 168-180.

NOGUTI, F. C. H.; ONUCHIC, L. R. **A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na transição dos Ensinos Fundamental e Médio para o Ensino Superior**. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 11., 2013, Curitiba/PR. Anais [...]. Curitiba: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2013.

ONRUBIA, J.; ROCHERA, J.; BARBERÀ, E. **O ensino e a aprendizagem da matemática: uma perspectiva psicológica**. In: COLL, C.; MARCHESI, A.; PALACIOS, J. Desenvolvimento psicológico e educação: psicologia da educação escolar. 2. ed. Artmed: 2004. cap. 19, p. 327-341.

OSINSKI, C. R. A.; ROTTA, E.; BÜTTENBENDER, P. L. Atividade turística e produção associada na Fronteira Noroeste do Rio Grande do Sul. **Anais do Simpósio Latino-Americano de Estudos de Desenvolvimento Regional**, Ijuí - RS - Brasil, v. 3, n. 3, 2023. Disponível em: <<https://www.publicacoeseventos.unijui.edu.br/index.php/slaedr/article/view/22855>>. Acesso em: 07 nov. 2025.

PAIS, L. C. **Análise do Livro Didático**. In: PAIS, Luiz Carlos. Ensinar e Aprender Matemática. Belo Horizonte: Autêntica: 2006. p. 47-58.

SANTA MARIA. **Plano de Desenvolvimento Institucional, 2019-2026**. Instituto Federal Farroupilha: 2019.

SANTA ROSA. Prefeitura Municipal de Santa Rosa/RS. **História**. Disponível em: <https://prefeitura.santarosa.rs.gov.br/?page_id=49>. Acesso em: 07 nov. 2025.

SANTA ROSA. **Plano de Ensino**: 3º ano do Ensino Médio – Matemática – Técnico em Mecatrônica. Instituto Federal Farroupilha – Campus Santa Rosa. 2025.

SANTA ROSA. **Projeto Pedagógico de Curso**: Técnico em Mecatrônica Integrado. Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia Farroupilha. Santa Rosa: 2021.

SEVERINO, A. J. **Proposta de um universo temático para a investigação em Filosofia da Educação**: as implicações da historicidade. Perspectiva: Florianópolis, 1994. UFSC/CED, NUP, n. 19, 1994. p.11-27.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. 17 ed. petrópolis, RJ: Vozes, 2014.

VASCONCELLOS, C. S. **Planejamento**: Plano de Ensino-Aprendizagem e Projeto Educativo. São Paulo: Libertad, 2006.

APÊNDICE



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Plano de Aula Semanal nº 1

Acadêmico: Maria Vitória Moresco Dalcin

Professora Orientadora: Ma. Marília Boessio Tex de Vasconcellos

Unidade Concedente: Instituto Federal Farroupilha – *Campus* Santa Rosa

Estágio – Turma / N° de alunos: 3º ano Ensino Médio / 35 alunos

Professor Regente da Classe: Eduardo Padoin

N° de Períodos semanal / Tempo de cada período: 3 / 50 minutos

Data/Horário: 05/09/2025 – 3 períodos - 7h30min às 10h

1 .Tema/Assunto:

Análise Combinatória

2. Objetos de Conhecimento:

Princípio Aditivo, Princípio Fundamental da Contagem (PFC) e fatorial.

3. Habilidades relativas a BNCC:

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

(EM13MAT315) Reconhecer um problema algorítmico, enunciá-lo, procurar uma solução e expressá-la por meio de um algoritmo, com o respectivo fluxograma.

4 . Objetivos

- Perceber o Princípio Fundamental da Contagem como parte do cotidiano por meio de situações envolvendo tomada de decisões;
- Diferenciar o princípio aditivo e o princípio multiplicativo ao interpretar enunciados envolvendo o Princípio Fundamental da Contagem;
- Resolver expressões numéricas compostas por fatoriais;
- Identificar potencialidades e dificuldades acerca dos conceitos explorados ao longo da aula, através da resolução dos exercícios propostos.

5. Metodologia

Método Expositivo e Dialogado;
Resolução de Problemas.

6. Recursos

Materiais de uso comum, material impresso, *notebook*, *internet*, *slides*, projetor.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

7. Desenvolvimento

Incentivação:

Antes de iniciar a aula, os alunos serão orientados a guardar os celulares na caixa da turma.

No primeiro momento a professora estagiária irá se apresentar para os alunos, bem como pedir para que eles se apresentem. Ela também explicará a organização das aulas: conteúdos que serão trabalhados (análise combinatória, probabilidade e matemática financeira), materiais (serão disponibilizados no SIGAA), critério de avaliação (prova escrita individual sem consulta), incentivando a dedicação e comprometimento dos alunos nas aulas. Explicar também sobre as fotografias para registro do estágio.

Após, a professora irá pedir aos alunos para que se sentem em duplas. Então, apresentará uma seleção de *slides* (Apêndice A) que irão guiar o estudo da Análise Combinatória, com conceitos e exemplos relacionados ao Princípio Fundamental da Contagem e Fatorial.

análise combinatória: pfc e fatorial

Primeiramente, a professora irá definir o que é a Análise Combinatória:

 **Análise Combinatória**

A Análise Combinatória é a área da Matemática que visa investigar as técnicas de contagem.

Muitos problemas em Matemática, Ciência da Computação e outras áreas técnicas envolvem contar os elementos de algum conjunto de objetos. Mas essa contagem nem sempre é fácil.

Aprenderemos como pensar os problemas sob um ponto de vista quantitativo.

Utilizamos técnicas de contagem, por exemplo, para descobrir quantas senhas podem ser formadas em um cadeado com segredo.



Princípio Aditivo
Princípio Fundamental da Contagem (PFC)
Permutação
Arranjo
Combinação

- A *Análise Combinatória* visa investigar ferramentas para contagem de determinados tipos de conjuntos e aprenderemos como pensar os problemas sob um ponto de vista quantitativo. A *Análise Combinatória* é a área da Matemática que trata das técnicas de contagem. Muitos problemas em matemática, ciência da computação e outras áreas técnicas envolvem contar os elementos de algum conjunto de objetos. Mas essa contagem nem sempre é fácil. Utilizamos técnicas de contagem, por exemplo, para descobrir quantas senhas podem ser formadas em um cadeado com segredo.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

- Na aula de hoje, vamos explorar o *Princípio Fundamental da Contagem*. Para darmos início, vou inicialmente propor uma questão para que vocês resolvam.

Desenvolvimento da Aula:

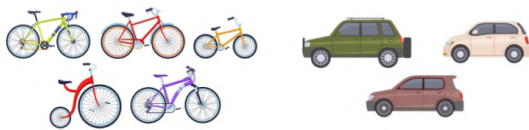
Parte I: Princípio Aditivo

Com o auxílio de *slides*, irá propor alguns minutos para as duplas que resolvam o seguinte problema nos cadernos:

❖ *Análise Combinatória | Princípio Aditivo*

Exemplo 1:

Raul tem cinco bicicletas e três carros. Ele pode chegar ao trabalho usando qualquer um desses veículos. De quantas formas diferentes ele pode chegar ao trabalho?



Raul tem cinco bicicletas e três carros. Ele pode chegar ao trabalho usando qualquer um desses veículos. De quantas formas diferentes ele pode chegar ao trabalho?

Então, será realizada uma plenária de forma oral. A professora irá questionar os alunos como encontraram a resposta, e depois corrigirá a questão no quadro.

Resposta: Como Raul não pode usar mais que 1 meio de transporte ao mesmo tempo, basta somar as cinco bicicletas aos três carros. Raul pode chegar ao trabalho de 8 maneiras diferentes.

Em seguida, será realizada a formalização do conceito de Princípio Aditivo da Contagem:



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

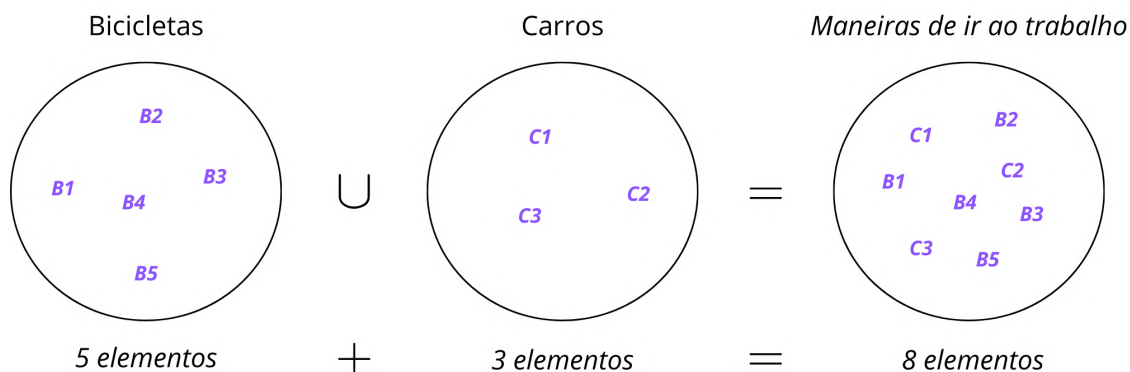
❖ *Análise Combinatória* | **Princípio Aditivo**

Sejam A e B dois conjuntos disjuntos, ou seja, não possuem elementos comuns. Se o conjunto A tem m elementos e o conjunto B tem n elementos, então $A \cup B$ possui $m+n$ elementos. Esse princípio é conhecido como **Princípio Aditivo da Contagem**.

O Princípio Aditivo é utilizado sempre que podemos escolher um **ou** outro acontecimento (também chamado de **evento**), sendo que ambos não podem ser escolhidos ao mesmo tempo.

- O Princípio Aditivo é utilizado sempre que podemos escolher um **ou** outro acontecimento (também chamado de **evento**), sendo que ambos não podem ser escolhidos ao mesmo tempo. Peça para que destaquem no caderno este conectivo.

- No problema que eu apresentei para vocês, o primeiro acontecimento (ou evento) era a escolha do conjunto das bicicletas e o segundo evento era a escolha do conjunto dos carros. Nós podíamos escolher entre uma das bicicletas **ou** um dos carros. Podemos representar os eventos graficamente da seguinte forma:



Após, a professora resolverá junto dos alunos o seguinte exemplo que será projetado:



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

❖ *Análise Combinatória* | Princípio Aditivo

Exemplo 2:

Saulo pretende comprar um único par de calçados em uma loja que disponibiliza 6 modelos de pares de tênis, 4 modelos de pares de sapato e 3 modelos de pares de chinelo. Quantas possibilidades Saulo tem se escolher apenas um par de calçados fechados nesta loja?



Saulo pretende comprar um único par de calçados em uma loja que disponibiliza 6 modelos de pares de tênis, 4 modelos de pares de sapato e 3 modelos de pares de chinelo. Quantas possibilidades Saulo tem se escolher apenas um par de calçados fechados nesta loja?

Resposta: Como Saulo pretende comprar um par de calçados fechados, devemos desconsiderar os 3 modelos de pares de chinelo. Então, basta somar os 6 modelos de pares de tênis aos 4 modelos de pares de sapato. Saulo pode escolher entre 10 possibilidades de calçados fechados.

Ilustrações: Emiliano Cavalcante

tênis

6 tênis

+

sapato

4 sapatos

=

10 calçados

Parte II: Princípio Multiplicativo

Em sequência, a professora irá propor alguns minutos para as duplas que resolvam o seguinte problema:



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

❖ *Análise Combinatória* | Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

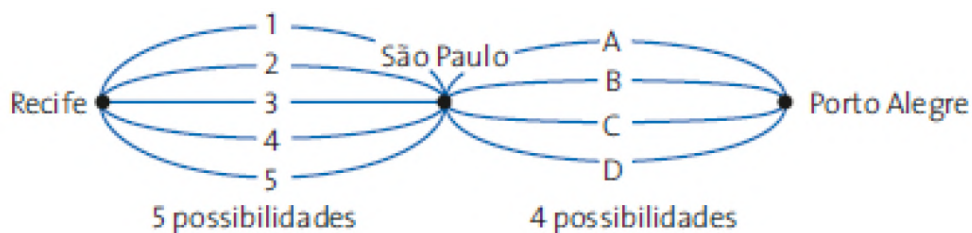
Exemplo 3:

Maria quer viajar de Recife a Porto Alegre passando por São Paulo. Sabendo que há 5 roteiros diferentes para chegar a São Paulo partindo de Recife e 4 roteiros diferentes para chegar a Porto Alegre partindo de São Paulo, de quantas maneiras possíveis Maria poderá viajar de Recife a Porto Alegre?

Maria quer viajar de Recife a Porto Alegre passando por São Paulo. Sabendo que há 5 roteiros diferentes para chegar a São Paulo partindo de Recife e 4 roteiros diferentes para chegar a Porto Alegre partindo de São Paulo, de quantas maneiras possíveis Maria poderá viajar de Recife a Porto Alegre?

Então, será realizada uma plenária de forma oral. A professora irá questionar os alunos como encontraram a resposta, e depois corrigirá a questão no quadro.

Resposta: Podemos representar graficamente a situação de duas formas



Neste caso, os eventos (roteiros) interagem entre si, pois para irmos de Recife até Porto Alegre precisamos, obrigatoriamente, passar por dois roteiros. Por isso, somar todos os roteiros não é uma opção.

Representando por meio da Árvore de Possibilidades conseguimos visualizar todas as possibilidades possíveis.

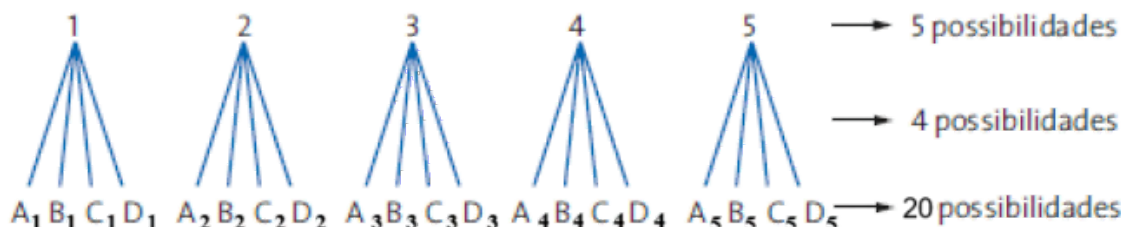


MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200



Contando o total de possibilidades, encontramos que Maria pode viajar de 20 maneiras diferentes de Recife até Porto Alegre.

Neste momento, a professora irá realizar o seguinte questionamento:

- Há uma maneira mais rápida de encontrarmos o resultado?

Resposta esperada: Outra maneira de descobrir todas as possibilidades é por meio da multiplicação. Há 5 possibilidades para viajar de Recife a São Paulo e 4 possibilidades para viajar de São Paulo a Porto Alegre. Portanto, basta multiplicar $5 \times 4 = 20$ para encontrar o total de possibilidades. Olhando para a Árvore de Possibilidades, também conseguimos observar que “A, B, C e D” (as 4 possibilidades) se repetem 5 vezes.

Em seguida, será realizada a formalização do conceito de Princípio Multiplicativo da Contagem (ou Princípio Fundamental da Contagem - PFC):

Análise Combinatória | Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

Se uma decisão A pode ser tomada de m maneiras distintas e, para cada uma dessas maneiras, uma outra decisão B pode ser tomada de n maneiras distintas, então o número de maneiras distintas de serem tomadas as decisões A e B é $m \cdot n$. Esse princípio é conhecido como princípio multiplicativo ou **Princípio Fundamental da Contagem (PFC)**.

O PFC é utilizado sempre quando um evento é composto de duas ou mais etapas sucessivas. O número total de possibilidades é calculado pela **multiplicação do número de possibilidades em cada etapa**.



Diagrama de árvore ou Árvore de Possibilidades: representação gráfica usada para mostrar todas as possíveis escolhas ou resultados de uma série de eventos ou decisões.

- O Princípio Multiplicativo, mais conhecido por Princípio Fundamental da Contagem, é utilizado sempre quando um evento é composto de duas ou mais etapas sucessivas. O número total de possibilidades é calculado pela multiplicação do número de possibilidades em cada etapa.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Após, a professora resolverá junto dos alunos o seguinte exemplo que será projetado:

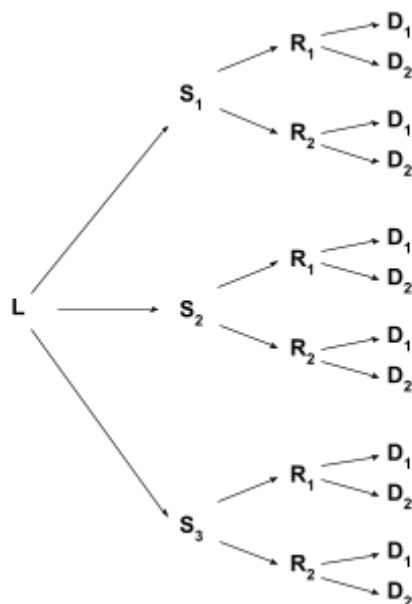
❖ *Análise Combinatória* | Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

Exemplo 4:

Numa lanchonete há 3 tipos de sanduíche, 2 tipos de refrigerante e 2 tipos de doces. De quantas maneiras podemos tomar um lanche composto de 1 sanduíche, 1 refrigerante e 1 doce?

Numa lanchonete há 3 tipos de sanduíche, 2 tipos de refrigerante e 2 tipos de doces. De quantas maneiras podemos tomar um lanche composto de 1 sanduíche, 1 refrigerante e 1 doce?

Resposta: Representando por S_1 , S_2 e S_3 os 3 tipos de sanduíche; por R_1 e R_2 os 2 tipos de refrigerante; e por D_1 e D_2 os 2 tipos de doces, temos:



Contando, temos 12 maneiras diferentes de montar o lanche.

Utilizando o PFC, conseguimos resolver o problema diretamente:



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

3 2 2
S R D

Basta multiplicar o número de possibilidades em cada etapa.

$$3 \cdot 2 \cdot 2 = 12 \text{ maneiras diferentes.}$$

Em seguida, a professora irá propor alguns minutos para as duplas que resolvam o seguinte problema:

❖ *Análise Combinatória* | Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

Exemplo 5:

Ao lançarmos simultaneamente uma moeda e um dado, temos quantas possibilidades para o resultado?

Ao lançarmos simultaneamente uma moeda e um dado, temos quantas possibilidades para o resultado?

Então, será realizada uma plenária de forma oral. A professora irá questionar os alunos como encontraram a resposta, e depois corrigirá a questão no quadro.

Resposta: Representando por meio da Árvore de Possibilidades temos



Utilizando o PFC, multiplicamos as 2 possibilidades da moeda (cara e coroa) pelas 6 possibilidades do dado (suas faces). Ou seja, $2 \times 6 = 12$ possibilidades para o resultado.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

A fim de trabalhar o PFC com Algarismos, a professora dará sequência com o exemplo a seguir. Durante a explicação, irá enfatizar que não há restrições do tipo “letras e número distintos”, então deve-se considerar todas as possibilidades.

❖ *Análise Combinatória* | Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

Exemplo 6:

Em 2018, uma mudança no emblema dos carros no Brasil adequou as placas ao padrão Mercosul. Nesta mudança, além da sua aparência, o sistema alfanumérico também foi modificado. Observem as imagens.



❖ *Análise Combinatória* | Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

Exemplo 6:



- O que mudou no padrão alfanumérico?
- Qual é o número total de possibilidades de placas no modelo antigo?
- Qual é o número total de possibilidades de placas no modelo atual?
- Com a implementação do novo modelo, quantas possibilidades de placas aumentaram?

Em 2018, uma mudança no emblema dos carros no Brasil adequou as placas ao padrão Mercosul. Nesta mudança, além da sua aparência, o sistema alfanumérico também foi modificado. Observem as imagens.



- O que mudou no padrão alfanumérico?
- Qual é o número total de possibilidades de placas no modelo antigo?
- Qual é o número total de possibilidades de placas no modelo atual?
- Com a implementação do novo modelo, quantas possibilidades de placas aumentaram?



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Respostas:

a) Houve a troca do segundo número para uma letra.

b)

<u>26</u>	<u>26</u>	<u>26</u>	<u>10</u>	<u>10</u>	<u>10</u>	<u>10</u>
LETRAS	LETRAS	LETRAS	ALG.	ALG.	ALG.	ALG.

$$\text{TOTAL} = 175.760.000$$

c)

<u>26</u>	<u>26</u>	<u>26</u>	<u>10</u>	<u>26</u>	<u>10</u>	<u>10</u>
LETRAS	LETRAS	LETRAS	ALG.	LETRAS	ALG.	ALG.

$$\text{TOTAL} = 456.976.000$$

d) Basta calcular a diferença entre o número de possibilidades de placas atuais e o número de possibilidades de placas antigas.

$$456\,976\,000 - 175\,760\,000 = 281\,216\,000$$

Ou ainda, podemos calcular por meio do PFC, da seguinte forma:

<u>26</u>	<u>26</u>	<u>26</u>	<u>10</u>	<u>(26 - 10)</u>	<u>10</u>	<u>10</u>
LETRAS	LETRAS	LETRAS	ALG.	DIF.	ALG.	ALG.

$$\text{TOTAL} = 281.216.000$$

- Vamos observar agora um exemplo numérico.

No quadro serão projetados os exemplos, um por vez, seguido pela explicação de suas resoluções.

❖ *Análise Combinatória | Princípio Fundamental da Contagem (PFC)*

Exemplo 7:

Em um cadeado com segredo, é possível formar senhas de 4 dígitos com os algarismos 9, 8, 7 e 6.

- a) Qual é o total de senhas possíveis?
- b) Quantas senhas ímpares podemos formar?
- b) Quantas senhas com algarismos distintos podemos formar?





MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Em um cadeado com segredo, é possível formar senhas de 4 dígitos com os algarismos 9, 8, 7 e 6.

a) Qual é o total de senhas possíveis?

b) Quantas senhas ímpares podemos formar?

b) Quantas senhas com algarismos distintos podemos formar?

Resposta:

- a) A senha deve possuir 4 dígitos. Ao todo temos 4 algarismos. Podemos sistematizar as possibilidades:*

4 4 4 4

Por fim, basta multiplicar o número de possibilidades em cada etapa.

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 256 \text{ senhas de 4 dígitos.}$$

- b) Para a senha possuir 4 dígitos e formar um número ímpar, o último algarismo também deve ser ímpar, ou seja, deve terminar com os algarismos 9 ou 7. Ao todo temos 4 algarismos. Podemos sistematizar as possibilidades:*

4 4 4 2

Por fim, basta multiplicar o número de possibilidades em cada etapa.

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 128 \text{ senhas ímpares de 4 dígitos.}$$

- c) Para a senha possuir 4 dígitos distintos, não podemos repetir nenhum número. Ao todo temos 4 algarismos. Para o primeiro algarismo conta-se todos. Para o segundo, não contamos o número utilizado anteriormente. Para o terceiro algarismo, os dois algarismos já utilizados são descartados. Para o quarto algarismo, os três algarismos já utilizados são descartados.*

Podemos sistematizar as possibilidades:

4 3 2 1

Por fim, basta multiplicar o número de possibilidades em cada etapa.

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ senhas de 4 dígitos distintos.}$$



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

❖ *Análise Combinatória* | Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

Exemplo 8:

Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5,

- a) Quantos números de 6 algarismos podemos formar?
- b) Quantos números pares de 6 algarismos podemos formar?
- c) Quantos números de 6 algarismos distintos podemos formar?

Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5.

a) quantos números de 6 algarismos podemos formar?

b) quantos números pares de 6 algarismos podemos formar?

c) quantos números de 6 algarismos distintos podemos formar?

Resposta:

- a) Para o número formado possuir 6 algarismos, não podemos começar com o algarismo zero. Ao todo temos 6 algarismos. Podemos sistematizar as possibilidades:

5 6 6 6 6 6
CM DM UM C D U

Por fim, basta multiplicar o número de possibilidades em cada etapa.

$$5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 38.880 \text{ números de 6 algarismos.}$$

- b) Para o número formado possuir 6 algarismos, não podemos começar com o algarismo zero. Para o número formado ser par, o algarismo das unidades também deve ser par, ou seja, o número deve terminar em 0, 2 ou 4. Ao todo temos 6 números. Podemos sistematizar as possibilidades:

5 6 6 6 6 3
CM DM UM C D U

Por fim, basta multiplicar o número de possibilidades em cada etapa.

$$5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 19.440 \text{ números pares de 6 algarismos.}$$



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

- c) Para o número formado possuir 6 algarismos distintos, não podemos repetir nenhum número, e não podemos começar com o algarismo zero. Ao todo temos 6 algarismos. Para o primeiro algarismo conta-se todos menos o zero. Para o segundo conta-se o zero, mas não o número utilizado anteriormente. Para o terceiro algarismo os dois algarismos já utilizados são descartados. E assim sucessivamente. Podemos sistematizar as possibilidades:

$$\begin{array}{cccccc} \underline{5} & \underline{5} & \underline{4} & \underline{3} & \underline{2} & \underline{1} \\ CM & DM & UM & C & D & U \end{array}$$

Por fim, basta multiplicar o número de possibilidades em cada etapa.

$$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 600 \text{ números de 6 algarismos distintos.}$$

❖ *Análise Combinatória* | Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

Exemplo 9:

Cinco amigos decidiram fazer uma viagem em 1 carro com 5 lugares. De quantos modos diferentes eles podem se acomodar nos 5 lugares do carro:

- a) Se apenas 3 podem dirigir?
b) Se todos podem dirigir?

Cinco amigos decidiram fazer uma viagem em 1 carro com 5 lugares. De quantos modos diferentes eles podem se acomodar nos 5 lugares do carro:

- a) Se apenas 3 podem dirigir?
b) Se todos podem dirigir?

Respostas:

- a) Como apenas 3 amigos podem dirigir, começamos sistematizando o lugar do motorista:

$$\begin{array}{c} \underline{3} \\ M \end{array} \quad - \quad - \quad - \quad -$$

Ao definir o motorista, restam 4 amigos para os demais lugares. Podemos representar as possibilidades para cada lugar como:



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

3 4 3 2 1
D

Por fim, basta multiplicar o número de possibilidades em cada etapa.

$$3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 72 \text{ modos diferentes de acomodar os amigos.}$$

b) Neste caso não há restrições, então podemos sistematizar todas as possibilidades na forma:

5 4 3 2 1
D

Por fim, basta multiplicar o número de possibilidades em cada etapa.

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ modos diferentes de acomodar os amigos.}$$

Parte III: Fatorial

- Esta multiplicação pode ser escrita na forma “5!” (lê-se “cinco fatorial”).

Então, será realizada a formalização do conceito de Fatorial:

❖ **Fatorial (!)**

Para qualquer número natural n , o fatorial de n , denotado por $n!$, é o produto de todos os números inteiros positivos de n até 1. Ou seja:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

Definição: $1! = 1$
 $0! = 1$

O Fatorial é uma operação em que multiplicamos o número por todos os seus antecessores naturais, até o 1.

Fique atento

Podemos escrever:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$$
$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\rightarrow$$

$$n! = n \cdot (n-1)!$$
$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$$
$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)!$$

etc.

- O Fatorial é uma operação em que multiplicamos o número por todos os seus antecessores naturais, até o 1. Também é importante destacar a definição de que $1! = 1$ e $0! = 1$.

Caso surgir questionamentos com relação ao fatorial de zero, a explicação segue da seguinte maneira: Um número fatorial também pode ser escrito pelo fatorial do seu sucessor dividido por esse sucessor:

$$n! = \frac{(n+1)!}{(n+1)}$$

Por exemplo:

$$4! = \frac{5!}{5} = \frac{5 \cdot 4!}{5} = 4!$$



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Seguindo a mesma lógica, para 0! temos:

$$0! = \frac{1!}{1} = 1$$

Para enfatizar o uso do símbolo “!” como um operador, a professora colocará a soma “3 + 2 =” no quadro. Então, pedirá para que eles respondam ao que foi escrito.

Resposta esperada: 3 + 2 é igual à 5.

- O operador “+” indicou para vocês qual operação precisava ser realizada, sem que eu precisasse enunciar “realize a soma”. Da mesma forma, o símbolo “!” quando aliado à um número, em um contexto matemático, também é um operador. Ou seja, ele já nos indica o que precisamos fazer.

Para aprofundar o entendimento sobre Fatorial, a professora resolverá os seguintes exemplos no quadro:

 Fatorial (!) Operador
Exemplo 10:
5!=
4!=
3!=

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

- Também podemos trabalhar com Fatorial em expressões numéricas.

Então, para demonstrar a simplificação de Fatoriais, a professora resolverá os seguintes exemplos no quadro:



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740
Fone: (55) 2013 0200

❖ Fatorial (!) | Simplificação de Fatoriais

Exemplo 11:

$$\frac{20!}{18!} =$$

$$\frac{48!+49!}{50!} =$$

❖ Fatorial (!) | Simplificação de Fatoriais

Exemplo 12:

$$\frac{n!}{(n-2)!} =$$

$$\frac{n!}{(n+1)!} =$$

$$\begin{aligned}\frac{20!}{18!} &= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{18!} = 380 \\ \frac{48!+49!}{50!} &= \frac{48!+(49 \cdot 48!)}{50!} = \frac{48! \cdot (1+49)}{50 \cdot 49 \cdot 48!} = \frac{50}{50 \cdot 49} = \frac{1}{49} \\ \frac{n!}{(n-2)!} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)!} = n \cdot (n-1) = n^2 - n \\ \frac{n!}{(n+1)!} &= \frac{n!}{(n+1) \cdot (n+1-1)!} = \frac{n!}{(n+1) \cdot n!} = \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Neste último caso, a professora irá enfatizar que ao simplificarmos o $n!$ no numerador por $n!$ no denominador, temos como resultado o número 1 no numerador.

Sistematização/Fechamento da Aula:

Para exercitar os conceitos explorados na aula, será encaminhada uma lista de exercícios envolvendo os Princípios Aditivo e Multiplicativo (PFC) e Fatorial. Os alunos poderão permanecer em duplas e/ou trios. A professora irá entregar a lista de exercícios impressa, auxiliando os alunos quando solicitado e acompanhando o seu desenvolvimento. Os alunos que não concluírem a lista em sala deverão terminá-la em casa.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Neste momento também será realizada a chamada para registrar a presença dos alunos.

Lista de exercícios 1 - Princípio Fundamental da Contagem e Fatorial

1. Belmiro tem três macacões de peça única, cinco calças de trabalho e oito camisas de trabalho. Ele usa um macacão ou uma calça com uma camisa para trabalhar. Com quantas possibilidades diferentes Belmiro pode se vestir para ir ao trabalho?

Resposta:

I. evento do macacão: 3 macacões.

II. evento das calças e camisas: $5 \cdot 8 = 40$ conjuntos.

Total: $3 + 40 = 43$ conjuntos.

2. Éder decidiu adquirir uma peça de roupa em certa loja que dispunha de 10 opções de modelos de calça, 19 opções de modelos de camisa, 15 opções de modelos de shorts e 8 opções de modelos de camiseta. Quantas possibilidades Éder tem de comprar uma única peça de roupa nessa loja?

Resposta: $10 + 19 + 15 + 8 = 52$ possibilidades.

3. Júlia quer assistir a um filme no cinema, a um espetáculo circense ou a uma peça de teatro. O circo que está na cidade em que ela mora apresenta 2 espetáculos distintos; cada um dos 3 cinemas da cidade tem 5 filmes diferentes em cartaz; e cada um dos 2 teatros mais próximos está apresentando 2 espetáculos diferentes. De quantas maneiras diferentes Julia pode escolher o que fazer?

Resposta:

*I. evento do cinema: 3 cinemas; 5 filmes diferentes em cada um:
 $3 \cdot 5 = 15$ possibilidades para o cinema.*

II. evento do circo: 2 espetáculos.

*III. evento do teatro: 2 teatros; 2 peças diferentes em cada um:
 $2 \cdot 2 = 4$ possibilidades para o teatro.*

Total: $15 + 2 + 4 = 21$ maneiras.

4. Ao lançarmos sucessivamente 3 moedas diferentes, quantas e quais são as possibilidades de resultado? Represente pela Árvore de Possibilidades e apresente o cálculo.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

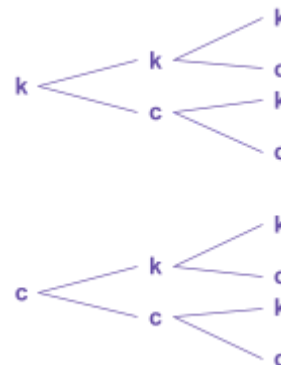
Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

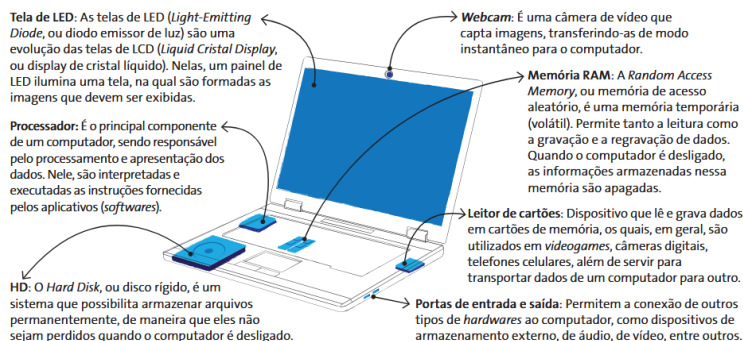
Resposta: Para cada lançamento há duas possibilidades: cara (k) ou coroa (c).

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \text{ possibilidades.}$$

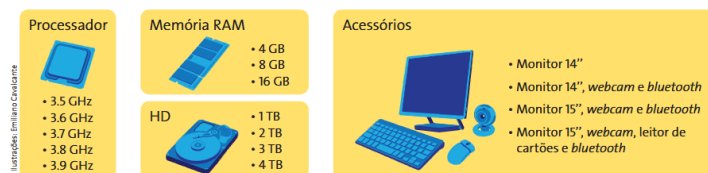
kkk
kkc
kck
kcc
ckk
ckc
ckc
ccc



5. Ao comprar um computador, os *sites* de compras oferecem várias possibilidades de configuração. De acordo com as necessidades do usuário, algumas de suas partes físicas, chamadas *hardwares*, precisam ser mais ou menos potentes, visto que a escolha inadequada de uma delas pode aumentar de maneira significativa o custo do computador sem a real necessidade. Veja no infográfico alguns dos hardwares que compõem um computador.



Para montar um computador, Carolina pretende escolher algumas peças. Uma das lojas que ela visitou ofereceu algumas opções, conforme indicado a seguir, além do mouse e do teclado que já estão inclusos na compra.



De quantas maneiras distintas Carolina pode montar um computador nessa loja, sabendo que ela pode escolher um processador, uma memória RAM, um HD e uma das opções de acessórios?



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Resposta: $5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 240$ maneiras

6. Usando somente os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos números:

- a) de 2 algarismos podemos formar?
- b) pares de 2 algarismos podemos formar?
- c) ímpares de 2 algarismos podemos formar?
- d) de 2 algarismos distintos podemos formar?
- e) de 2 algarismos pares podemos formar?

Resposta:

- a) Não podemos começar com o algarismo zero. Ao todo temos 7 algarismos.*

$$\begin{array}{c} \underline{6} \ \underline{7} \\ D \ U \end{array}$$

Por fim, basta multiplicar o número de possibilidades em cada etapa.

$$6 \cdot 7 = 42 \text{ números de 2 algarismos.}$$

- b) Não podemos começar com o algarismo zero. Os algarismos pares são 0, 2, 4 e 6 (4 possibilidades). Ao todo temos 7 algarismos.*

$$\begin{array}{c} \underline{6} \ \underline{4} \\ D \ U \end{array}$$

Por fim, basta multiplicar o número de possibilidades em cada etapa.

$$6 \cdot 4 = 24 \text{ números pares de 2 algarismos.}$$

- c) Não podemos começar com o algarismo zero. Os algarismos ímpares são 1, 3 e 5 (3 possibilidades). Ao todo temos 7 algarismos.*

$$\begin{array}{c} \underline{6} \ \underline{3} \\ D \ U \end{array}$$

Por fim, basta multiplicar o número de possibilidades em cada etapa.

$$6 \cdot 3 = 18 \text{ números ímpares de 2 algarismos.}$$

- d) Não podemos começar com o algarismo zero. A cada etapa precisamos descartar os números usados anteriormente. Ao todo temos 7 algarismos.*



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

6 6
D U

Por fim, basta multiplicar o número de possibilidades em cada etapa.

$$6 \cdot 6 = 36 \text{ números de 2 algarismos distintos.}$$

- e) Não podemos começar com o algarismo zero. Ao todo temos 4 algarismos pares (0, 2, 4 e 6).

3 4
D U

Por fim, basta multiplicar o número de possibilidades em cada etapa.

$$3 \cdot 4 = 12 \text{ números de 2 algarismos pares.}$$

7. Um show de talentos vai fazer audições com 3 jurados. Cada candidato tem direito a 5 minutos de apresentação e pode cantar, dançar, realizar um truque de magia, etc. Se ao menos 1 dos jurados aprovar o candidato, ele passa para a próxima etapa. De quantas maneiras diferentes um candidato pode ser aprovado?

Resposta: Note que não podemos repetir jurados.

- I. evento de 1 jurado aprovar: 3 possibilidades (uma para cada jurado).

- II. evento de 2 jurados aprovar:

3 2

$$3 \cdot 2 = 6 \text{ possibilidades.}$$

- III. evento de 3 jurados aprovar:

3 2 1

$$3! = 6 \text{ possibilidades.}$$

$$\text{Total: } 3 + 6 + 6 = 15 \text{ maneiras diferentes.}$$

8. Uma atividade é composta de 7 itens do tipo “verdadeiro ou falso”. De quantas maneiras distintas um estudante pode responder a essa atividade aleatoriamente, ou seja, “chutando” as respostas?

Resposta: Para cada item há duas possibilidades: verdadeiro (v) ou falso (f).

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{2} & \underline{2} & \underline{2} & \underline{2} & \underline{2} & \underline{2} & \underline{2} \\ 2^7 & = & 128 & \text{possibilidades.} \end{array}$$



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central - Santa Rosa/RS - CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

9. Calcule o valor ou simplifique:

a) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

a) $\frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

c) $\frac{3!5!}{4!6!} = \frac{3! \cdot 5!}{4 \cdot 3! \cdot 6 \cdot 5!} = \frac{1}{4 \cdot 6} = \frac{1}{24}$

d) $\frac{(n+1)!}{(n+2)!} = \frac{(n+1)!}{(n+2) \cdot (n+1)!} = \frac{1}{n+2}$

e) $\frac{(n+3)!}{(n-2)!} \cdot \frac{(n-1)!}{(n+2)!} = \frac{(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)!} \cdot \frac{(n-1)!}{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1)!} =$

$$\frac{(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1)}{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n} = n^2 - n + 3n - 3 = n^2 + 2n - 3$$

10. Determine o valor de n:

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 56$$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)!} = 56 \quad \Rightarrow \quad n \cdot (n-1) = 56 \quad \Rightarrow \quad n^2 - n = 56 \quad \Rightarrow \quad n^2 - n - 56 = 0$$

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-56)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 224}}{2} = \frac{1 \pm 15}{2} \Rightarrow n' = 8 \quad n'' = -7$$

Como estamos tratando de uma operação com Fatorial, desconsideramos a raiz negativa. Então, $n = 8$.

DESAFIO

11. (UFRGS 2025) Qual a quantidade de números possível de se formar com quatro algarismos distintos, de 1 a 9, que são múltiplos de 5?

- (A) 84
- (B) 112
- (C) 168
- (D) 210
- (E) 336

Resposta: Entre 1 e 9 temos apenas 1 múltiplo de cinco, o próprio 5. O último número deverá ser, obrigatoriamente, o número 5. Por isso, só temos 1 possibilidade para o algarismo das unidades.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

$\overline{UM} \overline{C} \overline{D} \overline{\frac{1}{U}}$

Para o restante, devemos sempre desconsiderar os algarismos já utilizados na etapa anterior. Assim, sistematizando as possibilidades, temos:

$\overline{8} \overline{7} \overline{6} \overline{\frac{1}{U}}$
 $UM \overline{C} \overline{D} \overline{U}$

Por fim, basta multiplicar o número de possibilidades em cada etapa.

$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1 = 336$ números de 4 algarismos distintos e múltiplos de 5.

12. (ENEM 2024) Para abrir a porta de uma empresa, cada funcionário deve cadastrar uma senha utilizando um teclado alfanumérico como o representado na figura.

1	2 _{ABC}	3 _{DEF}
4 _{GHI}	5 _{JKL}	6 _{MNO}
7 _{PQRS}	8 _{TUV}	9 _{WXYZ}
—	0	—

Por exemplo: a tecla que contém o número 2 traz as letras correlacionadas A, B e C. Cada toque nessa tecla mostra, sequencialmente, os seguintes caracteres: 2, A, B e C. Para os próximos toques, essa sequência se repete. As demais teclas funcionam da mesma maneira.

As senhas a serem cadastradas pelos funcionários devem conter 5 caracteres, sendo 2 algarismos distintos seguidos de 3 letras diferentes, nessa ordem. Um funcionário irá cadastrar a sua primeira senha, podendo escolher entre as teclas que apresentam os números 1, 2, 5, 7 e 0 e as respectivas letras correlacionadas, quando houver.

O número de possibilidades diferentes que esse funcionário tem para cadastrar sua senha é

- A) 11 520.
- B) 14 400.
- C) 18 000.
- D) 312 000.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

E) 390 000.

Resposta:

Números disponíveis: 1, 2, 5, 7 e 0 (5 algarismos);

Letras disponíveis: A, B, C, J, K, L, P, Q, R, S (10 letras).

Sistematizando as possibilidades, temos:

$\frac{5}{A} \frac{4}{A} \frac{10}{L} \frac{9}{L} \frac{8}{L}$

Por fim, basta multiplicar o número de possibilidades em cada etapa.

$5 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 14400$ possibilidades distintas para senha.

8. Avaliação

A avaliação da aprendizagem dos alunos será feita mediante aspectos qualitativos, como o empenho e dedicação, e quantitativos, como o registro no caderno e a realização dos exercícios propostos. Esta primeira semana também terá o propósito de diagnosticar os alunos com relação às operações básicas matemáticas, o que será analisado a partir dos registros no caderno e dos questionamentos realizados em aula.

9. Bibliografias

ANDRADE, T. M. [org.] **Matemática interligada**: estatística, análise combinatória e probabilidade / obra coletiva; editora responsável. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Provas e gabaritos**. Disponível em: <<https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>>.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, 2017.

BRASIL. Ministério da Integração e do Desenvolvimento Regional. **Placas padrão Mercosul serão obrigatórias a partir de 1º de dezembro de 2018 apenas para veículos novos e transferidos**. 2018. Disponível em: <<https://www.gov.br/mdr/pt-br/noticias/placas-padrao-mercossul-serao-obrigatorias-a-partir-de-1-de-dezembro-de-2018- apenas-para-veiculos-novos-e-transferidos>>.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Do seu jeito: Matemática**: área de Matemática e suas Tecnologias: volume 3: Ensino Médio. 1. ed. São Paulo: Ática, 2024.

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar, 5**: combinatória, probabilidade. 7. ed. São Paulo: Atual, 2004.

MARTINS, R. **Entenda por que o Fatorial de Zero é Igual a Um**. Atitude Reflexiva. 2016. Disponível em:
<<https://atitudereflexiva.wordpress.com/2016/05/03/entenda-por-que-o-fatorial-de-zero-e-igual-a-um/>>.

RIBEIRO, L. **Análise Combinatória e Probabilidades**. Apresentação em *slides*. Disponível em:
<<https://www.slideshare.net/slideshow/analise-comb-e-probabilidades/3385558>>.

10. Observações

Ao longo da aula, senti que os alunos estavam considerando os exemplos e exercícios fáceis, o que se confirmou posteriormente quando uma aluna conversou comigo e contou que eles já viram um pouco desse conteúdo em outro momento do curso em uma matéria técnica. Mesmo assim, os alunos fizeram questionamentos, inclusive acerca do fatorial de zero, que expliquei utilizando dos conjuntos e pela ideia dos sucessores.

Outro questionamento foi com relação à simplificação de frações, colocando em evidência os termos comuns, pois por vezes restará “1” nos termos separados por soma e/ou subtração. Esta dúvida me surpreendeu, pois revelou uma lacuna no aprendizado da turma no geral que devo me atentar para as próximas aulas.

Um aspecto que me surpreendeu positivamente foi no momento em que solicitei um voluntário para ir ao quadro e um dos alunos incluídos se dispôs a construir a árvore de possibilidades. Me surpreendi pois este aluno, pelas minhas observações anteriores, tende a preferir ficar mais sozinho e não interage muito com os colegas.

Ainda sobre este aluno, devo tomar cuidado para não escrever com caneta azul no quadro, pois ele tem dificuldade de reconhecer devido ao daltonismo. Também é importante que eu escreva maior para que ele consiga enxergar, de preferência na parte mais central do quadro, como ele me indicou.



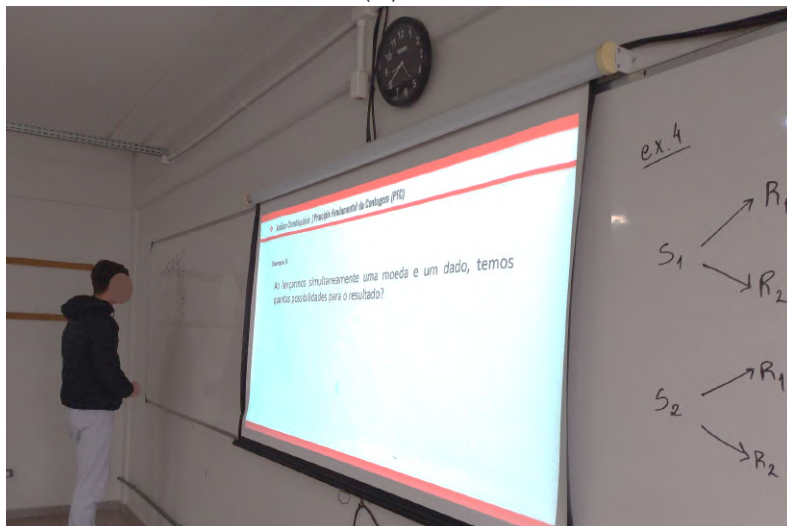
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central - Santa Rosa/RS - CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200



Para as próximas listas, posso diminuir o número de exercícios, buscando uma variedade maior, menos repetitividade e progressão de dificuldade. Ademais, os objetivos da aula foram atingidos e os alunos foram receptivos com relação à proposta da aula, participando e interagindo em todos os momentos.

Maria Vitória M. Dalcin

Maria Vitória Moresco Dalcin
Aluna – Estagiária

Eduardo Padoin

Dr. Eduardo Padoin
Supervisor – Parte Concedente

Marília Boessio Tex de Vasconcellos

Ma. Marília Boessio Tex de Vasconcellos
Professora Orientadora – Entidade Educacional



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA
Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740
Fone: (55) 2013 0200

Apêndice A: Apresentação de slides sobre Princípio Aditivo, PFC e Fatorial.



❖ **Análise Combinatória**

o estudo da
Análise Combinatória

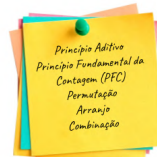
Princípio Aditivo, PFC e Fatorial

A Análise Combinatória é a área da Matemática que visa investigar as técnicas de contagem.

Muitos problemas em Matemática, Ciência da Computação e outras áreas técnicas envolvem contar os elementos de algum conjunto de objetos. Mas essa contagem nem sempre é fácil.

Aprenderemos como pensar os problemas sob um ponto de vista quantitativo.

Utilizamos técnicas de contagem, por exemplo, para descobrir quantas senhas podem ser formadas em um cadeado com segredo.



❖ **Análise Combinatória | Princípio Aditivo**

❖ **Análise Combinatória | Princípio Aditivo**

Exemplo 1:

Raul tem cinco bicicletas e três carros. Ele pode chegar ao trabalho usando qualquer um desses veículos. De quantas formas diferentes ele pode chegar ao trabalho?



Sejam A e B dois conjuntos disjuntos, ou seja, não possuem elementos comuns. Se o conjunto A tem m elementos e o conjunto B tem n elementos, então $A \cup B$ possui $m+n$ elementos. Esse princípio é conhecido como **Princípio Aditivo da Contagem**.

O Princípio Aditivo é utilizado sempre que podemos escolher um **ou** outro acontecimento (também chamado de **evento**), sendo que ambos não podem ser escolhidos ao mesmo tempo.

❖ **Análise Combinatória | Princípio Aditivo**

❖ **Análise Combinatória | Princípio Fundamental da Contagem (PFC)**

Exemplo 2:

Saulo pretende comprar um único par de calçados em uma loja que disponibiliza 6 modelos de pares de tênis, 4 modelos de pares de sapato e 3 modelos de pares de chinelo. Quantas possibilidades Saulo tem se escolher apenas um par de calçados fechados nesta loja?



Exemplo 3:

Maria quer viajar de Recife a Porto Alegre passando por São Paulo. Sabendo que há 5 roteiros diferentes para chegar a São Paulo partindo de Recife e 4 roteiros diferentes para chegar a Porto Alegre partindo de São Paulo, de quantas maneiras possíveis Maria poderá viajar de Recife a Porto Alegre?

❖ **Análise Combinatória | Princípio Fundamental da Contagem (PFC)**

❖ **Análise Combinatória | Princípio Fundamental da Contagem (PFC)**

Se uma decisão A pode ser tomada de m maneiras distintas e, para cada uma dessas maneiras, uma outra decisão B pode ser tomada de n maneiras distintas, então o número de maneiras distintas de serem tomadas as decisões A e B é $m \cdot n$. Esse princípio é conhecido como princípio multiplicativo ou **Princípio Fundamental da Contagem (PFC)**.

O PFC é utilizado sempre quando um evento é composto de duas ou mais etapas sucessivas. O número total de possibilidades é calculado pela **multiplicação do número de possibilidades em cada etapa**.



Diagrama de árvore ou Árvore de Possibilidades: representação gráfica usada para mostrar todas as possíveis escolhas ou resultados de uma série de eventos ou decisões.

Exemplo 4:

Numa lanchonete há 3 tipos de sanduíche, 2 tipos de refrigerante e 2 tipos de doces. De quantas maneiras podemos tomar um lanche composto de 1 sanduíche, 1 refrigerante e 1 doce?



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740
Fone: (55) 2013 0200

❖ Análise Combinatória | Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

Exemplo 5:

Ao lançarmos simultaneamente uma moeda e um dado, temos quantas possibilidades para o resultado?

❖ Análise Combinatória | Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

Exemplo 6:

Em 2018, uma mudança no emplacamento dos carros no Brasil adequou as placas ao padrão Mercosul. Nesta mudança, além da sua aparência, o sistema alfanumérico também foi modificado. Observem as imagens.



❖ Análise Combinatória | Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

Exemplo 6:



- O que mudou no padrão alfanumérico?
- Qual é o número total de possibilidades de placas no modelo antigo?
- Qual é o número total de possibilidades de placas no modelo atual?
- Com a implementação do novo modelo, quantas possibilidades de placas aumentaram?

Exemplo 7:

Em um cadeado com segredo, é possível formar senhas de 4 dígitos com os algarismos 9, 8, 7 e 6.

- Qual é o total de senhas possíveis?
- Quantas senhas ímpares podemos formar?
- Quantas senhas com algarismos distintos podemos formar?



❖ Análise Combinatória | Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

Exemplo 8:

Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5,

- Quantos números de 6 algarismos podemos formar?
- Quantos números pares de 6 algarismos podemos formar?
- Quantos números de 6 algarismos distintos podemos formar?

❖ Análise Combinatória | Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

Exemplo 9:

Cinco amigos decidiram fazer uma viagem em 1 carro com 5 lugares. De quantos modos diferentes eles podem se acomodar nos 5 lugares do carro:

- Se apenas 3 podem dirigir?
- Se todos podem dirigir?

❖ Fatorial (!)

Para qualquer número natural n , o fatorial de n , denotado por $n!$, é o produto de todos os números inteiros positivos de n até 1. Ou seja:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

Definição: $1! = 1$
 $0! = 1$

O Fatorial é uma operação em que multiplicamos o número por todos os seus antecessores naturais, até o 1.

Fique atento
Podemos escrever:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$



$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 1$$

etc.

❖ Fatorial (!) | Operador

Exemplo 10:

$$5! =$$

$$4! =$$

$$3! =$$



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

❖ *Fatorial (n!)* | Simplificação de Fatoriais

Exemplo 11:

$$\frac{20!}{18!} =$$

$$\frac{48!+49!}{50!} =$$

❖ *Fatorial (n!)* | Simplificação de Fatoriais

Exemplo 12:

$$\frac{n!}{(n-2)!} =$$

$$\frac{n!}{(n+1)!} =$$

Fonte: A Autora (2025).



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Plano de Aula Semanal nº 2

Acadêmico: Maria Vitória Moresco Dalcin

Professora Orientadora: Ma. Marília Boessio Tex de Vasconcellos

Unidade Concedente: Instituto Federal Farroupilha – *Campus* Santa Rosa

Estágio – Turma / N° de alunos: 3º ano Ensino Médio / 35 alunos

Professor Regente da Classe: Eduardo Padoin

N° de Períodos semanal / Tempo de cada período: 3 / 50 minutos

Data/Horário: 12/09/2025 – 3 períodos - 7h30min às 10h

1 .Tema/Assunto:

Análise Combinatória

2. Objetos de Conhecimento:

Permutação simples, permutação com repetição e arranjo simples

3. Habilidades relativas a BNCC:

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

(EM13MAT315) Reconhecer um problema algorítmico, enunciá-lo, procurar uma solução e expressá-la por meio de um algoritmo, com o respectivo fluxograma.

4 . Objetivos

- Relacionar os conceitos de permutação e arranjo em situações do mundo real, auxiliando na sua compreensão;
- Desenvolver o raciocínio lógico através de situações-problema propostas, estimulando o uso de diferentes estratégias de resolução;
- Diferenciar os tipos de permutação e arranjo ao interpretar enunciados de Análise Combinatória, reconhecendo as características de cada caso;
- Utilizar das operações com fatoriais para simplificar os cálculos em exercícios envolvendo permutação e arranjo;
- Comparar o Princípio Fundamental da Contagem e o arranjo simples como métodos análogos na resolução de exercícios.
- Identificar potencialidades e dificuldades acerca dos conceitos explorados ao longo das aulas, através da resolução dos exercícios propostos.

5. Metodologia



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740
Fone: (55) 2013 0200

Método Expositivo e Dialogado;
Atividade prática;
Resolução de Problemas.

6. Recursos

Materiais de uso comum, material impresso, *notebook*, *internet*, *slides*, projetor.

7. Desenvolvimento

Incentivação:

Antes de iniciar a aula, os alunos serão orientados a guardar os celulares na caixa da turma.

No primeiro momento, a professora estagiária destinará aproximadamente 30 minutos para correção de questões da lista de exercícios da aula anterior. As questões selecionadas serão aquelas com maior dúvida entre a turma.

Parte I: Permutação simples

Para dar início aos conceitos da aula, a professora irá pedir para que 3 alunos com nomes de diferentes iniciais se coloquem em frente a turma com suas cadeiras, lado a lado (exemplo: Débora, Saulo, Maria). Então, a professora apresentará a seguinte questão, por meio de *slides* (Apêndice A) que irão guiar o estudo desta aula:

 análise combinatória: permutação e arranjo simples

❖ *Análise Combinatória* | Permutação Simples

Exemplo 1:

De quantas maneiras os 3 alunos podem se sentar nas 3 cadeiras?
Quais são elas?



De quantas maneiras os 3 alunos podem se sentar nas 3 cadeiras?
Quais são elas?

Resposta: 6 maneiras.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Débora, Saulo e Maria.

Débora, Maria e Saulo.

Saulo, Débora e Maria.

Saulo, Maria e Débora.

Maria, Saulo e Débora.

Maria, Débora e Saulo.

Em paralelo, a professora irá registrar no quadro as possibilidades conforme as orientações da turma. Após todas as possibilidades serem registradas, os alunos serão orientados a realizar o registro no caderno.

- Neste caso, estamos organizando 3 elementos (as pessoas) em três lugares, sem repetir, e sim variando a sua ordem.

Como vimos anteriormente, também podemos sistematizar as possibilidades em cada etapa:

3 2 1

Ao multiplicarmos, encontramos:

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6 \text{ maneiras.}$$

Desenvolvimento da Aula:

Em seguida, será realizada a formalização do conceito de Permutação Simples:

❖ *Análise Combinatória* | **Permutação Simples**

Permutar é sinônimo de trocar. Nos problemas de contagem, a permutação pode ser associada à noção de embaralhar, isto é, trocar a posição dos objetos.

Os agrupamentos ordenados, que **se diferem pela ordem**, formados por n elementos recebem o nome de **permutações simples** quando **não há repetição de elementos**.

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

- A permutação é utilizada quando trocamos todos os objetos de posição, ou seja, os embaralhamos. A permutação simples ocorre quando não repetimos nenhum elemento.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

- *Vejamos outro exemplo:*

Após, a professora resolverá com os alunos o seguinte exemplo que será projetado:

❖ *Análise Combinatória | Permutação Simples*

Exemplo 2:

Em uma urna há 8 bolas de 8 cores distintas. Qual o número de maneiras distintas que podemos retirar essas bolas uma a uma?



Em uma urna há 8 bolas de 8 cores distintas. Qual o número de maneiras distintas que podemos retirar essas bolas uma a uma?

Resposta: Estamos permutando 8 elementos dentro de um conjunto. Calcularemos então a permutação de 8 elementos.

$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$ maneiras distintas de retirar as bolas.

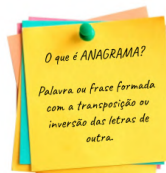
A fim de trabalhar as permutações com anagramas, a professora dará sequência com o exemplo a seguir.

❖ *Análise Combinatória | Permutação Simples*

Exemplo 3:

Calcule quantos são os anagramas:

- a) Da palavra PERDÃO;
- b) Da palavra PERDÃO que iniciam com P e terminam em O;
- c) Da palavra PERDÃO em que as letras A e O aparecem juntas e nessa ordem (ÃO);
- d) Da palavra PERDÃO em que P e O aparecem nos extremos;
- e) Da palavra PERDÃO em que as letras PER aparecem juntas, em qualquer ordem.



Calcule quantos são os anagramas:

a) Da palavra PERDÃO:

b) Da palavra PERDÃO que iniciam com P e terminam em O:



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

c) Da palavra PERDÃO em que as letras A e O aparecem juntas e nessa ordem (ÃO):

d) Da palavra PERDÃO em que P e O aparecem nos extremos:

e) Da palavra PERDÃO em que as letras PER aparecem juntas, em qualquer ordem.

Resposta: Cada anagrama corresponde a uma ordem de colocação dessas 6 letras.

a) Basta calcular P_6 :

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \text{ anagramas da palavra PERDÃO.}$$

b) Primeiro representamos a restrição: P _ _ _ _ O

Devemos permutar as 4 letras não fixas, ou seja, calcular P_4 :

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ anagramas da palavra PERDÃO iniciados com P e terminados em O.}$$

c) Pela necessidade de sempre estarem juntas e nessa ordem, consideramos (ÃO) como uma só letra. Assim, ao todo teremos os elementos: P E R D (ÃO). Então, basta calcularmos P_5 :

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ anagramas da palavra PERDÃO em que as letras ãO ficam juntas nessa ordem.}$$

d) Primeiro representamos a restrição:

i) P _ _ _ _ O

ou

ii) O _ _ _ _ P

Como vimos na letra c, basta calcular P_4 em ambos os casos. Ou seja:

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Assim, a quantidade de anagramas é:

$$24 + 24 = 48 \text{ anagramas da palavra PERDÃO em que P e O aparecem nos extremos.}$$



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

- e) i) Como as 3 letras de *PER* devem estar juntas, mas podem aparecer em qualquer ordem, podemos calcular todas as maneiras de organizá-las:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

e

- ii) Pela necessidade de sempre estarem juntas, consideramos (*PER*) como uma só letra. Assim, ao todo teremos os elementos: (*PER*) D Ñ O. Então, basta calcularmos P_4 :

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Assim, a quantidade de anagramas é:

$24 \cdot 6 = 144$ anagramas da palavra *PERDÃO* em que as letras *PER* aparecem juntas em qualquer ordem.

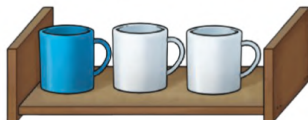
Parte II: Permutação com repetição

- Até agora estudamos permutações simples, ou seja, em que os elementos não se repetiam. Mas e no caso dos elementos se repetirem? Vamos observar o exemplo:

❖ Análise Combinatória | Permutação com repetição

Exemplo 4:

Tulio tem 3 canecas: 1 caneca azul e 2 canecas brancas. Todas as canecas são iguais e se diferenciam exclusivamente pelas cores. Quantas possibilidades de organização das canecas existem?



Tulio tem 3 canecas: 1 caneca azul e 2 canecas brancas. Todas as canecas são iguais e se diferenciam exclusivamente pelas cores. Quantas possibilidades de organização das canecas existem?

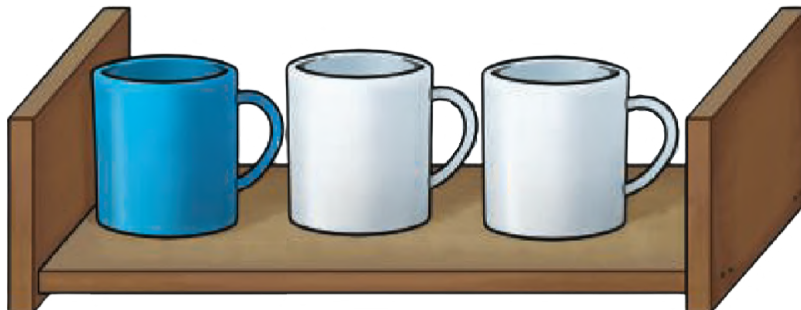


MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200



- A imagem nos mostra uma opção de organização: Azul, Branco e Branco. Se trocarmos as canecas brancas entre si, fará diferença na organização?

Resposta esperada: Não, continuará Azul, Branco e Branco.

Resposta: Começamos listando as possibilidades:

A B B
A B B

B A B
B A B

B B A
B B A

Ao todo temos 6 possibilidades. Algumas dessas possibilidades de organização se repetem. Considerando apenas as possibilidades diferentes, temos 3 possibilidades.

As permutações entre as canecas brancas não produzirão uma nova organização: se trocarmos as canecas brancas entre si, continuará igual. Então, precisamos dividir o total de anagramas P_3 por P_2 (quantidade de permutações possíveis para as duas canecas brancas):

$$P_3^2 = \frac{P_3}{P_2} = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \cdot 2!}{2!} = 3$$

Em seguida, será realizada a formalização do conceito de Permutação com Repetição:

❖ *Análise Combinatória* | Permutação com repetição

Recebem o nome de **permutações com repetição** a permutação de n elementos, dos quais um elemento é repetido α vezes, outro elemento é repetido β vezes, outro elemento é repetido γ vezes, e assim por diante, dada por:

$$P_{n, \alpha, \beta, \gamma} = \frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma!} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{array} \right. \text{ representam o número de vezes que certo elemento se repete.}$$

A **permutação com repetição** ocorre quando repetimos elementos. O resultado indicará todas as possibilidades distintas.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

- A *permutação com repetição* ocorre quando repetimos elementos. O resultado indicará todas as possibilidades distintas.

- Vejamos outro exemplo:

❖ *Análise Combinatória* | **Permutação com repetição**

Exemplo 5:

Quantos anagramas da palavra CAMARADA começam com A?

Quantos anagramas da palavra CAMARADA começam com A?

Resposta: Primeiro representamos a restrição, fixando a letra A no início:

A _ _ _ _ _

Agora, basta permutarmos as letras restantes. Como há 3 letras A das 7 letras restantes, podemos definir $\alpha = 3$. Assim, temos a permutação com repetição:

$$P_7^3 = \frac{P_7}{P_3} = \frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840 \text{ anagramas de CAMARADA que começam com A.}$$

Parte III: Arranjo simples

Para dar início ao conceito de arranjo simples, a professora deverá posicionar 2 cadeiras (L1 e L2) em frente à turma e convidar 3 alunos para se colocarem em junto dessas (ex.: Camila, Júlia e Letícia). Então, a professora apresentará a seguinte questão, por meio de *slides*:



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

❖ *Análise Combinatória* | Arranjo Simples

Exemplo 6:

De quantas maneiras diferentes os 3 alunos podem se sentar nas 2 cadeiras?



De quantas maneiras diferentes os 3 alunos podem se sentar nas 2 cadeiras?

Resposta: 6 maneiras.

L1	C	C	J	J	L	L
L2	L	J	L	C	C	J
	J	L	C	L	J	C



Em paralelo, a professora irá registrar no quadro as possibilidades conforme as orientações da turma. Após todas as possibilidades serem registradas, os alunos serão orientados a realizar o registro no caderno.

- Neste caso, estamos organizando 3 elementos (as pessoas), em 2 lugares, sem repetir e variando a sua ordem. Dizemos que estamos agrupando os 3 elementos, de 2 em 2. Anteriormente, na permutação, o número de elementos (pessoas) era igual ao número de posições (cadeiras), agora o número de elementos (pessoas) é maior que o número de posições (cadeiras). Em ambos os casos, a **ordem dos elementos importa**.

Estamos agrupando 3 elementos de 2 em 2. Na primeira cadeira temos 3 possibilidades, na segunda cadeira teremos 2 possibilidades. Podemos calcular as possibilidades utilizando o PFC:

3 2

Ao multiplicar, encontramos:

$$3 \cdot 2 = 6 \text{ maneiras}$$



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

- Para realizarmos o cálculo das possibilidades, podemos utilizar também o método do arranjo simples.

Então, será realizada a formalização do conceito de Arranjo Simples:

❖ *Análise Combinatória* | Arranjo Simples

Arranjos simples de n elementos tomados p a p (com $p \in \mathbb{N}^*$ e $p \leq n$) são os agrupamentos ordenados que podem ser formados com p dos n elementos distintos dados.

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-p+1)$$

ou

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Lê-se “arranjo de n elementos tomados p a p ”.

O arranjo simples é utilizado para determinar a quantidade de formas de se escolher partes dos elementos de um conjunto maior disponível, sem repetir elementos e considerando a ordem.

- O Arranjo Simples é utilizado para determinar a quantidade de formas de se escolher partes dos elementos de um conjunto maior disponível, sem repetir elementos e considerando a ordem. Dizemos “arranjo de n elementos tomados p a p ”.

- No exemplo acima, podemos descrevê-lo como um arranjo da seguinte forma:

Estamos agrupando 3 elementos de 2 em 2.
 $n = 3$ e $p = 2$

$$A_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 3! = 6 \text{ maneiras.}$$

- Vejamos outro exemplo:

Após, a professora resolverá com os alunos o seguinte exemplo que será projetado:



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

❖ *Análise Combinatória* | Arranjo Simples

Exemplo 7:

Um clube tem 10 membros. A diretoria é formada por 1 presidente, 1 vice-presidente, 1 secretário e 1 tesoureiro. Se uma pessoa pode ocupar apenas 1 desses cargos, de quantas maneiras diferentes é possível formar uma diretoria?

Um clube tem 10 membros. A diretoria é formada por 1 presidente, 1 vice-presidente, 1 secretário e 1 tesoureiro. Se uma pessoa pode ocupar apenas 1 desses cargos, de quantas maneiras diferentes é possível formar uma diretoria?

Resposta: Note que a ordem é importante. Ser presidente é diferente de ser vice-presidente ou secretário e assim por diante. Começamos organizando a diretoria:

$\bar{P} \quad \bar{VP} \quad \bar{S} \quad \bar{T}$

i) pelo PFC temos:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040 \text{ maneiras de organizar a diretoria.}$$

ii) pelo método do Arranjo temos:
 $n = 10$ e $p = 4$

$$A_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 5040 \text{ maneiras de organizar a diretoria.}$$

A fim de trabalhar o arranjo simples com algoritmos, a professora dará sequência com o exemplo a seguir.

- Também podemos trabalhar com arranjos simples em expressões algébricas.

Então, a professora resolverá o exemplo no quadro:



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

❖ *Análise Combinatória* | Arranjo Simples

Exemplo 8:

Determine a expressão correspondente a:

$$A_{2x+1, 3} =$$

Determine a expressão correspondente a: $A_{2x+1, 3} =$

Resposta:

$n = 2x+1$ e $p = 3$

$$A_{2x+1, 3} = \frac{(2x+1)!}{[(2x+1)-3]!} = \frac{(2x+1)!}{(2x-2)!} = \frac{(2x+1) \cdot (2x+1-1)!}{(2x-2)!} = \frac{(2x+1) \cdot (2x) \cdot (2x-1) \cdot (2x-2)!}{(2x-2)!} =$$

$$(2x + 1) \cdot (2x) \cdot (2x - 1) = (2x) \cdot (4x^2 - 1) = 8x^3 - 2x$$

Sistematização/Fechamento da Aula:

Para exercitar os conceitos explorados na aula, será encaminhada uma lista de exercícios envolvendo Permutação e Arranjo simples. Os alunos poderão se organizar em duplas e/ou trios. A professora irá entregar a lista de exercícios impressa, auxiliando os alunos quando solicitado e acompanhando o seu desenvolvimento. Os alunos que não concluírem a lista em sala deverão terminá-la em casa.

Neste momento também será realizada a chamada para registrar a presença dos alunos.

Lista de exercícios 2 - Permutação e Arranjo Simples

1. Quantos são os anagramas da palavra ARARAQUARA que começam e terminam com A?

Resposta:

Começamos pela restrição: a palavra precisa começar e terminar com A.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central - Santa Rosa/RS - CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

A _ _ _ _ _ A

Na palavra ARARAQUARA temos 2 letras que se repetem. A letra A se repete 5 vezes, porém já usamos duas delas ($\alpha = 5 - 2 = 3$), e a letra R se repete 3 vezes ($\beta = 3$). Ao todo, temos 8 letras para permutar.

$$P_8^{3,3} = \frac{P_8}{P_3 \cdot P_3} = \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 1\,120$$

anagramas da palavra ARARAQUARA que começam e terminam com A.

2. Determine os arranjos a seguir:

$$\text{a) } \frac{A_{7,4}}{A_{6,4}} = \frac{\frac{7!}{(7-4)!}}{\frac{6!}{(6-4)!}} = \frac{\frac{7!}{(3)!}}{\frac{6!}{(2)!}} = \frac{7! \cdot 2!}{3! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 6! \cdot 2!}{3 \cdot 2! \cdot 6!} = \frac{7}{3}$$

$$\text{b) } A_{x-3,2} = \frac{(x-3)!}{[(x-3)-2]!} = \frac{(x-3)!}{(x-5)!} = \frac{(x-3) \cdot (x-4) \cdot (x-5)!}{(x-5)!} = (x-3) \cdot (x-4) = (x-3) \cdot (x-4) = x^2 - 4x - 3x + 12 = x^2 - 7x + 12$$

3. Um casal pretende ter 4 filhos, sendo 2 meninas e 2 meninos, em qualquer ordem de nascimento. Quantas são as ordens possíveis em que podem ocorrer esses 4 nascimentos?

Resposta: Ao todo temos 4 elementos (filhos) e 4 posições (ordem de nascimento). Os elementos se repetem: 2 meninas ($\alpha = 2$) e 2 meninos ($\beta = 2$). Portanto, se trata de uma permutação com repetição:

$$P_4^{2,2} = \frac{P_4}{P_2 \cdot P_2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \frac{12}{2} = 6 \text{ ordens possíveis.}$$

4. Quantas frações diferentes (e não iguais a 1) podemos escrever usando os números 2, 3, 5, 7, 11 e 13?

Resposta: Ao todo temos 6 elementos (números) e 2 posições (numerador e denominador da fração), ou seja, agrupando 6 elementos de 2 em 2. A restrição nos diz que as frações não podem ser iguais a 1, ou seja, o numerador não pode ser igual ao denominador. Portanto, se trata de um arranjo simples.

$$A_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 6 \cdot 5 = 30 \text{ frações diferentes.}$$



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

5. Um automóvel comporta dois passageiros nos bancos da frente e três, no de trás. Calcule o número de alternativas distintas para lotar o automóvel com pessoas escolhidas dentre sete, de modo que uma dessas pessoas nunca ocupe um lugar nos bancos da frente.

Resposta: Ao todo temos 7 elementos que queremos agrupar de 5 em 5 com uma restrição: uma das pessoas (vamos chamá-la de Vera) nunca irá ocupar os assentos da frente.

i) fixando Vera no banco de trás: 6 pessoas disponíveis para organizar em 4 assentos.

$$A_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

Porém, Vera pode se sentar em qualquer um dos 3 bancos de trás, portanto multiplicamos o resultado por 3:

$$360 \cdot 3 = 1080 \text{ alternativas.}$$

ii) Vera não entrará no carro: 6 pessoas disponíveis para organizar em 5 assentos.

$$A_{6,5} = \frac{6!}{(6-5)!} = \frac{6!}{1!} = 6! = 720 \text{ alternativas diferentes.}$$

iii) por fim, basta somar as possibilidades, pois ou acontecerá o evento i OU acontecerá o evento ii:

$$1080 + 720 = 1800 \text{ alternativas diferentes de lotar o automóvel.}$$

6. Considere a palavra MATRIZES. Quantos anagramas de 4 letras distintas podemos formar:

a) começando com a letra T?

b) terminando com as letras ZE?

c) de modo que contenha a letra A?

Resposta: Cada anagrama corresponde ao agrupamento de 4 em 4 de 8 letras em uma ordem de colocação.

Pelo número de posições ser menor do que o número de elementos, pela ordem importar e pelas letras serem distintas, devemos usar o Arranjo Simples.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central - Santa Rosa/RS - CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

- a) Primeiro representamos a restrição: T _ _ _
Devemos arranjar as 7 letras restantes nas 3 posições restantes, ou seja, calcular $A_{7,3}$:

$$A_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210 \text{ anagramas com 4 letras da palavra MATRIZES iniciados com T.}$$

- b) Primeiro representamos a restrição: _ _ Z E
Devemos arranjar as 6 letras restantes nas 2 posições restantes, ou seja, calcular $A_{6,2}$:

$$A_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 6 \cdot 5 = 30 \text{ anagramas com 4 letras da palavra MATRIZES terminados em ZE.}$$

- c) A letra A ocupará uma das posições do anagrama, nos restando 3 posições para arranjar as 7 letras restantes:

$$A_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

Sabemos que a letra A poderá ocupar qualquer uma das 4 posições do anagrama, então multiplicamos o resultado anterior por 4:

$$210 \cdot 4 = 840 \text{ anagramas que contém a letra A.}$$

7. Colocando todos os anagramas da palavra ÂNGULO listados em ordem alfabética, como em um dicionário, em que posição da lista estará a palavra:

- a) ÂGLNOU?
b) UONLGÂ?
c) ÂNGULO?

Resposta: Começamos listando as letras da palavra ÂNGULO em ordem alfabética:

Â G L N O U

- a) O anagrama ÂGLNOU estará na primeira posição.
b) As letras do anagrama UONLGÂ estão na ordem inversa da primeira posição, portanto este anagrama estará na última posição.

Para descobrirmos o número da sua posição, basta calcularmos a quantidade de permutações possíveis:



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

$$P_6 = 6! = 720 \text{ anagramas possíveis.}$$

Assim, o anagrama UONLGÂ ocupa a 720ª posição.

c) Para calcularmos a posição do anagrama ÂNGULO, seguimos em etapas:

i) iniciamos com o anagrama da primeira posição:

Â G L N O U

Pela lista estar em ordem alfabética, precisamos passar por todos os anagramas que iniciam com Â G e por todos os anagramas que iniciam com Â L (pois L virá depois do G) para então chegar naqueles que iniciam com Â N.

Para isso, precisamos calcular as seguintes permutações:

$$\hat{A} G _ _ _ _ = P_4 = 4! = 24 \text{ anagramas.}$$

$$\hat{A} L _ _ _ _ = P_4 = 4! = 24 \text{ anagramas.}$$

Chegando em: Â N G _ _ _

iii) Seguindo a ordem alfabética, precisamos passar por todos os anagramas que iniciam com Â N G L e por todos os anagramas que iniciam com Â N G O (pois O virá depois do L) para então chegar naqueles que iniciam com Â N G U.

Para isso, precisamos calcular as seguintes permutações:

$$\hat{A} N G L _ _ = P_2 = 2! = 2 \text{ anagramas.}$$

$$\hat{A} N G O _ _ = P_2 = 2! = 2 \text{ anagramas.}$$

Chegando em: Â N G U _ _

iv) Seguindo a ordem alfabética, as próximas letras serão L e O.

$$\hat{A} N G U L O = P_1 = 1! = 1 \text{ anagrama.}$$



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

v) Para descobrir a posição, basta somar todas as permutações realizadas:

$$24 + 24 + 2 + 2 + 1 = 53^{\text{a}} \text{ posição.}$$

8. Uma matriz quadrada 3×3 deve ser preenchida com 4 "zeros", 3 "cincos" e 2 "setes". De quantas maneiras podemos preencher essa matriz?

Resposta: A matriz quadrada 3×3 possui 9 elementos. Ao todo temos 4 "zeros", 3 "cincos" e 2 "setes" para preencher esta matriz, ou seja, 9 elementos, sendo que estes se repetem. Portanto, vamos calcular uma permutação com repetição.

$$P_9^{4,3,2} = \frac{P_9}{P_4 \cdot P_3 \cdot P_2} = \frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 = 1260 \text{ maneiras.}$$

DESAFIO

9. (PUC SP) O número n está para o número de seus arranjos 3 a 3, assim como 1 está para 240. Portanto, n é igual a:

- (A) 14 (B) 17 (C) 18 (D) 31 (E) Nda.

Resposta: O enunciado nos traz uma razão e proporção:

$$\frac{n}{A_{n,3}} = \frac{1}{240}$$

Para encontrar o valor de n , basta multiplicarmos os meios pelos extremos.

$$\begin{aligned} 240n &= A_{n,3} \\ 240n &= \frac{n!}{(n-3)!} \\ 240n &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)!}{(n-3)!} \\ 240n &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \\ 240 &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{n} \\ 240 &= (n-1) \cdot (n-2) \\ 240 &= n^2 - 2n - n + 2 \\ 240 &= n^2 - 3n + 2 \\ 0 &= n^2 - 3n - 238 \end{aligned}$$



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

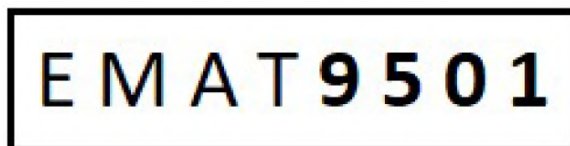
Fone: (55) 2013 0200

Encontrando as raízes da equação:

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-238) = 9 + 952 = 961$$
$$n = \frac{3 \pm \sqrt{961}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 31}{2} \quad n' = \frac{3+31}{2} = 17 \quad n'' = \frac{3-31}{2} = -14$$

Como estamos tratando de operação com fatorial, consideramos o resultado positivo $n = 17$.

10. (UFRGS 2023) Uma biblioteca está elaborando etiquetas de identificação para os livros do acervo de tal forma que, em cada etiqueta, são usadas quatro letras distintas, de um alfabeto de 26 letras, e quatro algarismos também distintos, de 0 a 9. A figura abaixo mostra um exemplo de modelo da etiqueta produzida.



Assinale a alternativa que apresenta o número total de etiquetas distintas produzidas pela biblioteca.

- (A) $26 + 10$
- (B) $26 \cdot 10$
- (C) $A_{26,4} \cdot A_{10,4}$
- (D) $A_{26,4} + A_{10,4}$
- (E) $10A_{26,4} + 26A_{10,4}$

Resposta: Analisamos por partes.

i) 4 letras distintas: o alfabeto possui 26 letras, que serão agrupadas de 4 em 4, sem repetir elementos. Portanto, o número de possibilidades pode ser expresso por

$$A_{26,4}$$

e



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

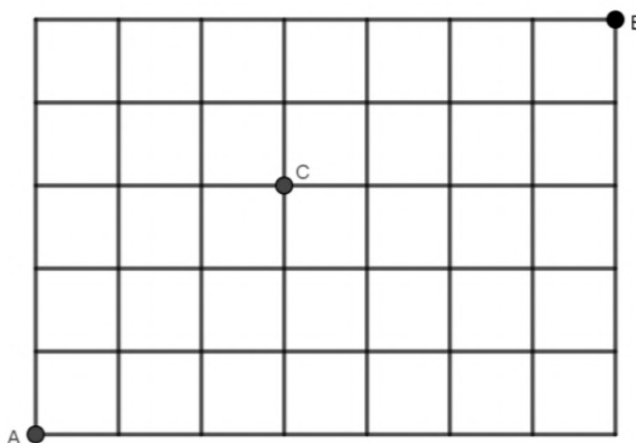
ii) 4 Algarismos distintos: o alfabeto possui 10 algarismos, que serão agrupados de 4 em 4, sem repetir elementos. Portanto, o número de possibilidades pode ser expresso por

$$A_{10,4}$$

Como tratamos de etapas sucessivas de escolhas (eventos), basta multiplicarmos as possibilidades calculadas anteriormente.

$$A_{26,4} \cdot A_{10,4}$$

11. (UFRGS 2020) Um aplicativo de transporte disponibiliza em sua plataforma a visualização de um mapa com ruas horizontais e verticais que permitem realizar deslocamentos partindo do ponto A e chegando ao ponto B, conforme representado na figura abaixo.



O número de menores caminhos possíveis que partem de A e chegam a B, passando por C, é

- (A) 28 (B) 35 (C) 100 (D) 300 (E) 792

Resposta: Para percorrer o menor caminho partindo de A até B, passando pelo ponto C é necessário utilizar em cada uma das passagens apenas caminhos verticais (V) e horizontais (H), sempre avançando.

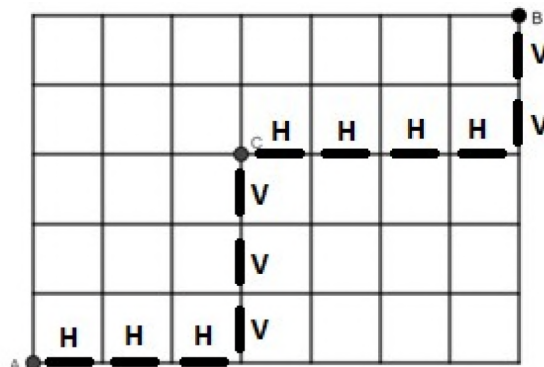


MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200



Como mostra a imagem acima, para que se tenha o menor caminho entre os pontos A e C é necessário utilizar 3 H's e 3 V's.

$$P_6^{3,3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 4 = 20 \text{ caminhos.}$$

e

Para que se tenha o menor caminho entre os pontos C e B é necessário utilizar 4 H's e 2 V's.

$$P_6^{4,2} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = \frac{30}{2} = 15 \text{ caminhos.}$$

Como tratamos de etapas sucessivas de escolhas (eventos), basta multiplicarmos as possibilidades calculadas anteriormente.

$$20 \cdot 15 = 300 \text{ caminhos.}$$

8. Avaliação

A avaliação da aprendizagem dos alunos será feita mediante aspectos qualitativos, como a participação nas propostas da aula, dedicação e colaboração com os colegas, e quantitativos, como o registro no caderno e a realização dos exercícios propostos.

9. Bibliografias

ANDRADE, T. M. [org.] **Matemática interligada**: estatística, análise combinatória e probabilidade / obra coletiva; editora responsável. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Provas e gabaritos**. Disponível em:



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

<<https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>>.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, 2017.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Do seu jeito: Matemática**: área de Matemática e suas Tecnologias: volume 3: Ensino Médio. 1. ed. São Paulo: Ática, 2024.

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar, 5**: combinatória, probabilidade. 7. ed. São Paulo: Atual, 2004.

10. Observações

Os alunos foram receptivos com relação à proposta da aula, participando e interagindo em todos os momentos. A interação professora estagiária/alunos ocorreu positivamente, nos momentos em que os alunos dispersaram o foco da aula, apenas os chamar foi o suficiente para que voltassem sua atenção para a explicação ou para as atividades.

A atividade com as cadeiras, além de contribuir para a introdução do conteúdo, também despertou os alunos e voltou sua atenção para o quadro.

Alguns aspectos, no entanto, percebi que podem ser melhorados:

- Observar que a interpretação das questões pode seguir pelas perguntas: Quantos são os elementos? Como estou agrupando? Estou usando todos? A ordem deles importa?;
- Deixar mais claro o meu objetivo com as cadeiras: observar se a ordem importa, e se sim, o porquê;
- Ter mais claro todas as possibilidades de perguntas e modos de fazer dentro dos exemplos e exercícios.

Também optarei por não colocar o gabarito das questões nas próximas listas. Pela experiência de hoje, percebi que muitas vezes eles acabam criando teorias que fogem da lógica para chegar na resposta, e isto pode prejudicar a sua interpretação. Ademais, o momento dedicado aos exercícios foi produtivo para os alunos e para mim, pois pude sanar as diversas dúvidas que surgiram com as novas situações e interpretações trazidas pela lista de exercícios.

Em conversa posterior, o professor regente também sugeriu:

- Caso os alunos façam uma pergunta que você não tenha compreendido, questione novamente. E, se necessário, não há problema em dizer que irá pensar e responder em alguns instantes/na próxima aula;



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

- Um dos alunos incluídos gosta de se envolver nas atividades, por isso é necessário sempre fazer a mediação para que ele consiga participar. Por exemplo, se ele quer participar da atividade com as cadeiras, mas os colegas se organizam antes, “reservar” verbalmente para o próximo.
- “Ignorar” as respostas do aluno mais avançado. Ele sempre responderá com prontidão, mas os colegas precisam de mais tempo para pensar e acompanhar o raciocínio. Uma forma de fazer isso é questionar o porquê daquela resposta e como chegar no tal resultado. Assim ele tem a chance de compartilhar seu conhecimento com os colegas e se sentir estimulado, bem como os colegas conseguem assimilar a informação.

Tais sugestões foram positivas em me ajudar a visualizar melhor as relações em sala de aula e aprender como adaptar as situações para a diversidade de sujeitos em sala de aula.

Maria Vitória Moresco Dalcin
Aluna – Estagiária

Dr. Eduardo Padoin
Supervisor – Parte Concedente

Ma. Marília Boessio Tex de Vasconcellos
Professora Orientadora – Entidade Educacional



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Apêndice A: Apresentação de slides sobre Permutação e Arranjo simples.



❖ **Análise Combinatória | Permutação Simples**

o estudo da **Análise Combinatória**

Permutação e Arranjo simples

Exemplo 1:

De quantas maneiras os 3 alunos podem se sentar nas 3 cadeiras?
Quais são elas?



❖ **Análise Combinatória | Permutação Simples**

Permutar é sinônimo de trocar. Nos problemas de contagem, a permutação pode ser associada à noção de embaralhar, isto é, trocar a posição dos objetos.

Os agrupamentos ordenados, que **se diferem pela ordem**, formados por n elementos recebem o nome de **permutações simples** quando **não há repetição de elementos**.

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

❖ **Análise Combinatória | Permutação Simples**

Exemplo 2:

Em uma urna há 8 bolas de 8 cores distintas. Qual o número de maneiras distintas que podemos retirar essas bolas uma a uma?

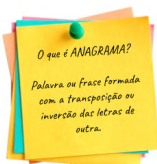


❖ **Análise Combinatória | Permutação Simples**

Exemplo 3:

Calcule quantos são os anagramas:

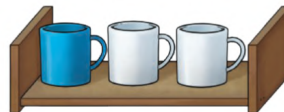
- a) Da palavra PERDÃO;
- b) Da palavra PERDÃO que iniciam com P e terminam em O;
- c) Da palavra PERDÃO em que as letras A e O aparecem juntas e nessa ordem (AO);
- d) Da palavra PERDÃO em que P e O aparecem nos extremos;
- e) Da palavra PERDÃO em que as letras PER aparecem juntas, em qualquer ordem.



❖ **Análise Combinatória | Permutação com repetição**

Exemplo 4:

Tulio tem 3 canecas: 1 caneca azul e 2 canecas brancas. Todas as canecas são iguais e se diferenciam exclusivamente pelas cores. Quantas possibilidades de organização das canecas existem?



❖ **Análise Combinatória | Permutação com repetição**

Recebem o nome de **permutações com repetição** a permutação de n elementos, dos quais um elemento é repetido α vezes, outro elemento é repetido β vezes, outro elemento é repetido γ vezes, e assim por diante, dada por:

$$P_{n, \alpha, \beta, \gamma} = \frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma!}$$

α, β, γ representam o número de vezes que certo elemento se repete.

A **permutação com repetição** ocorre quando repetimos elementos. O resultado indicará todas as possibilidades distintas.

❖ **Análise Combinatória | Permutação com repetição**

Exemplo 5:

Quantos anagramas da palavra CAMARADA começam com A?



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA
Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740
Fone: (55) 2013 0200

❖ Análise Combinatória | Arranjo Simples

Exemplo 6:

De quantas maneiras diferentes os 3 alunos podem se sentar nas 2 cadeiras?



❖ Análise Combinatória | Arranjo Simples

Arranjos simples de n elementos tomados p a p (com $p \in \mathbb{N}^*$ e $p \leq n$) são os agrupamentos ordenados que podem ser formados com p dos n elementos distintos dados.

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-p+1)$$

ou

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Lê-se “arranjo de n elementos tomados p a p ”.

O arranjo simples é utilizado para determinar a quantidade de formas de se escolher partes dos elementos de um conjunto maior disponível, sem repetir elementos e considerando a ordem.

❖ Análise Combinatória | Arranjo Simples

Exemplo 7:

Um clube tem 10 membros. A diretoria é formada por 1 presidente, 1 vice-presidente, 1 secretário e 1 tesoureiro. Se uma pessoa pode ocupar apenas 1 desses cargos, de quantas maneiras diferentes é possível formar uma diretoria?

❖ Análise Combinatória | Arranjo Simples

Exemplo 8:

Determine a expressão correspondente a:

$A_{2x+1, 3} =$

Fonte: A Autora (2025).



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central - Santa Rosa/RS - CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Plano de Aula Semanal nº 3

Acadêmico: Maria Vitória Moresco Dalcin

Professora Orientadora: Ma. Marília Boessio Tex de Vasconcellos

Unidade Concedente: Instituto Federal Farroupilha – *Campus* Santa Rosa

Estágio – Turma / N° de alunos: 3° ano Ensino Médio / 35 alunos

Professor Regente da Classe: Eduardo Padoin

N° de Períodos semanal / Tempo de cada período: 3 / 50 minutos

Data/Horário: 19/09/2025 – 3 períodos - 7h30min às 10h

1 .Tema/Assunto:

Análise Combinatória

2. Objetos de Conhecimento:

Combinação simples

3. Habilidades relativas a BNCC:

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

(EM13MAT315) Reconhecer um problema algorítmico, enunciá-lo, procurar uma solução e expressá-la por meio de um algoritmo, com o respectivo fluxograma.

4 . Objetivos

- Relacionar o conceito de combinação simples em situações do mundo real, auxiliando na sua compreensão;
- Desenvolver o raciocínio lógico através de situações-problema propostas, estimulando o uso de diferentes estratégias de resolução;
- Utilizar das operações com fatoriais para simplificar os cálculos em exercícios envolvendo combinação simples;
- Sistematizar as diferenças entre cada conceito da Análise Combinatória, reconhecendo as características de cada caso;
- Expressar o entendimento acerca dos conceitos de Análise Combinatória através de uma avaliação pedagógica individual com consulta ao material;
- Identificar potencialidades e dificuldades acerca dos conceitos explorados ao longo das aulas, através da resolução dos exercícios propostos.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

5. Metodologia

Método Expositivo e Dialogado;

Atividade prática;

Resolução de Problemas.

6. Recursos

Materiais de uso comum, material impresso, *notebook*, *internet*, *slides*, projetor.

7. Desenvolvimento

Incentivação:

Antes de iniciar a aula, os alunos serão orientados a guardar os celulares na caixa da turma.

No primeiro momento, a professora destinará aproximadamente 30 minutos para correção de questões da lista de exercícios da aula anterior. As questões selecionadas serão aquelas com maior dúvida entre a turma.

Parte I: Combinação simples

Para dar início aos conceitos da aula, a professora estagiária irá pedir para que 4 alunos com nomes de diferentes iniciais se coloquem em frente a turma, lado a lado (exemplo: Fabiane, João, Lucas e Matilda). Então, a professora apresentará a seguinte questão, por meio de *slides* (Apêndice A) que irão guiar o estudo desta aula:

análise combinatória: combinação

Análise Combinatória | Combinação Simples

Exemplo 1:

De quantas maneiras os 4 alunos podem formar duplas? Quais são elas?



De quantas maneiras os 4 alunos podem formar duplas? Quais são elas?

Resposta: 6 maneiras.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

D1	F	J	= FJ
D2	F	L	= LF
D3	F	M	= MF
D4	J	L	= LJ
D5	J	M	= MJ
D6	M	L	= LM

Em paralelo, a professora irá registrar no quadro as possibilidades conforme as orientações da turma. Após todas as possibilidades serem registradas, os alunos serão orientados a realizar o registro no caderno.

- Neste caso, estamos selecionando 4 elementos (as pessoas) de 2 em 2, sem repetir, e sim variando os elementos. E a variação da ordem dos elementos não vai alterar o conjunto final.

- A diferença é que esta dupla é um conjunto de pessoas, então a ordem não importa. No arranjo, quando falamos do modo de se sentar, podemos sentar em ordens diferentes.

Pelo PFC podemos sistematizar:

4 3

Ao multiplicarmos, encontramos:

$$4 \cdot 3 = 12 \text{ maneiras.}$$

- O resultado que obtemos pelo PFC não corresponde às 6 duplas que descobrimos por meio do nosso experimento. O que vocês acham que aconteceu?

Resposta esperada: Precisamos dividir o resultado por 2.

- Por que, então, o PFC não nos traz o resultado diretamente?

Resposta esperada: Pois ele considera a ordem dos elementos. Para o PFC, a dupla Fabiane e Lucas é diferente da dupla Lucas e Fabiane.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Desenvolvimento da Aula:

Então a professora continuará a explicação da resolução:

O PFC considera a ordem em que agrupamos, mas se estamos analisando somente o conjunto, sem nos importarmos com a ordem, ainda falta calcularmos uma etapa: nesse exemplo em específico, dividir por 2. Assim, nos restarão 6 maneiras.

- Por isso, dizemos que na combinação a ordem dos elementos não importa.

Em seguida, será realizada a formalização do conceito de Combinação Simples:

❖ Análise Combinatória | Combinação Simples

A combinação é utilizada quando selecionamos elementos dentro de um conjunto maior, sem considerar a ordem em que são escolhidos.

Sejam n, p números naturais, com $p \leq n$, chama-se **combinação simples** de n elementos distintos tomados p a p todo subconjunto ou agrupamento **não ordenado** formado por p elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados.

$$C_{n,p}, C_n^p \text{ ou } \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

A combinação simples ocorre quando não repetimos nenhum elemento.

- A combinação é utilizada quando selecionamos elementos dentro de um conjunto maior, sem considerar a ordem em que são escolhidos. A combinação simples ocorre quando não repetimos nenhum elemento.

A professora também irá enfatizar as diferentes notações conhecidas para a combinação simples, como apresenta o *slide*.

- Vejamos outro exemplo:

Após, a professora resolverá junto dos alunos o seguinte exemplo que será projetado:



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

❖ *Análise Combinatória* | **Combinação Simples**

Exemplo 2:

Com 6 idosos e 5 jovens, quantas comissões de 6 pessoas, com exatamente 4 idosos, podem ser formadas?



Com 6 idosos e 5 jovens, quantas comissões de 6 pessoas, com exatamente 4 idosos, podem ser formadas?

Resposta: Estamos selecionando 4 idosos de um grupo com 6 idosos, sem que sua ordem importe. Assim, temos:

$$C_{6,4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15 \text{ combinações de idosos.}$$

e

Estamos selecionando 2 jovens de um grupo com 5 jovens, sem que sua ordem importe. Assim, temos:

$$C_{5,2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10 \text{ combinações de jovens.}$$

Como são decisões interdependentes, basta multiplicar as combinações:

$$15 \cdot 10 = 150 \text{ combinações possíveis para comissão.}$$

Então, a professora apresentará a propriedade das combinações por meio de slides.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740
Fone: (55) 2013 0200

❖ Análise Combinatória | Combinação Simples

Propriedade das Combinações

$$C_{n,p} = C_{n,n-p}$$

A propriedade das combinações é útil para simplificar os cálculos e é conhecida como **igualdade de combinações complementares**.

Podemos notar que:

$$C_{3,2} = C_{3,1} \text{ pois } C_{3,2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3 \text{ e } C_{3,1} = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3.$$

$$C_{5,3} = C_{5,2} \text{ pois } C_{5,3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \text{ e } C_{5,2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10.$$

- Vejamos o exemplo:

❖ Análise Combinatória | Combinação Simples

Exemplo 3:

Determine a expressão correspondente a:

$$C_{100,98} = C_{100,2}$$

$$C_{100,98} = C_{100,2}$$

$$C_{100,98} = \frac{100!}{98!(100-98)!} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98!}{98! \cdot 2!} = \frac{100 \cdot 99}{2 \cdot 1} = 4950$$

$$C_{100,2} = \frac{100!}{2!(100-2)!} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98!}{2! \cdot 98!} = \frac{100 \cdot 99}{2 \cdot 1} = 4950$$

Em seguida, a professora resolverá o seguinte exemplo que será projetado:



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740
Fone: (55) 2013 0200

❖ *Análise Combinatória* | Combinação Simples

Exemplo 4:

Em um plano marcamos 6 pontos distintos, dos quais 3 nunca estão alinhados.

a) Quantos segmentos de reta podemos representar ligando-os 2 a 2?

b) Quantos triângulos podemos formar tendo sempre 3 desses pontos como vértices?

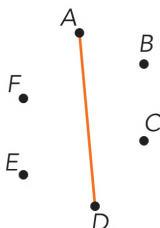
Em um plano marcamos 6 pontos distintos, dos quais 3 nunca estão alinhados.

a) Quantos segmentos de reta podemos representar ligando-os 2 a 2?

b) Quantos triângulos podemos formar tendo sempre 3 desses pontos como vértices?

Respostas:

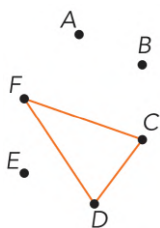
a) Marcamos 6 pontos em um plano, onde não há 3 deles alinhados.



Como em cada segmento de reta há 2 extremos e, por exemplo, o segmento de reta $\overline{AD}$ é o mesmo que o segmento de reta $\overline{DA}$, o número de segmentos de reta é dado por:

$$C_{6,2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15 \text{ segmentos de reta.}$$

b) Como cada triângulo é determinado por 3 pontos não colineares, temos, independentemente da ordem deles:





MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 \text{ triângulos diferentes.}$$

A fim de trabalhar a combinação simples com algorismos, a professora dará sequência com o exemplo a seguir.

- *Também podemos trabalhar com combinação simples em expressões algébricas.*

Então, a professora resolverá o exemplo no quadro:

❖ *Análise Combinatória | Combinação Simples*

Exemplo 5:

Determine o valor de x em:

$$5 + C_{x,2} = x + 14$$

Determine o valor de x em: $5 + C_{x,2} = x + 14$

Resposta:

$$5 + C_{x,2} = x + 14$$

$$5 + \frac{x!}{2!(x-2)!} = x + 14$$

$$5 + \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)!}{2!(x-2)!} = x + 14$$

$$5 + \frac{x \cdot (x-1)}{2 \cdot 1} = x + 14$$

$$\frac{x^2 - x}{2} = x + 14 - 5$$

$$x^2 - x = 2(x + 9)$$

$$x^2 - x = 2x + 18 \Rightarrow x^2 - 3x - 18 = 0$$



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

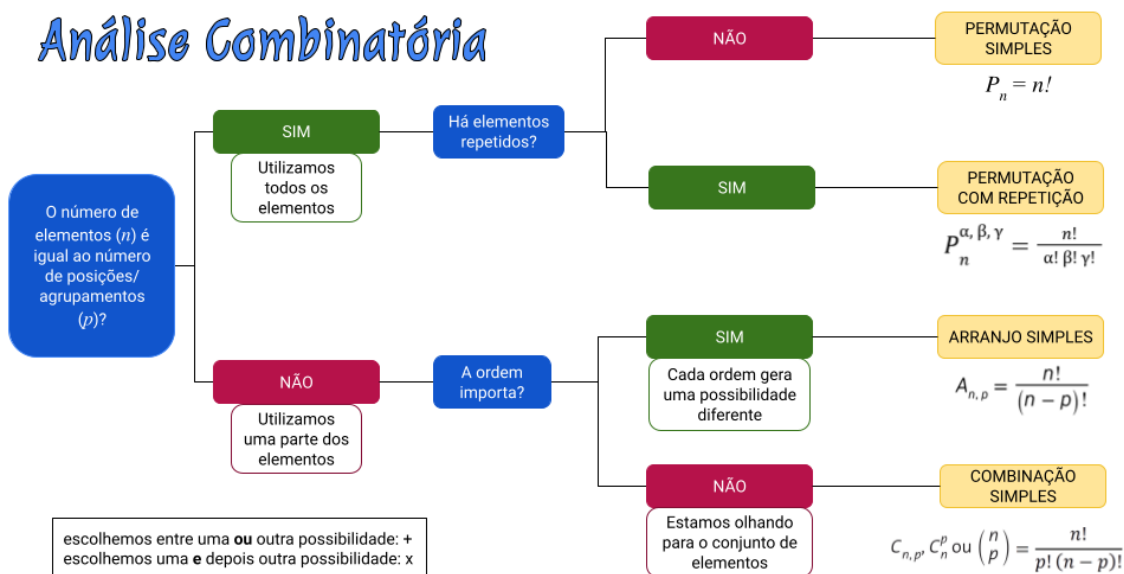
Encontrando as raízes da equação:

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18) = 9 + 72 = 81$$
$$n = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 9}{2} \quad n' = \frac{3+9}{2} = 6 \quad n'' = \frac{3-9}{2} = -3$$

Como estamos tratando de operação com fatorial, consideramos o resultado positivo $n = 6$.

Parte II: Sistematização da Análise Combinatória

A professora irá sistematizar no quadro, com a ajuda dos alunos, todos os conceitos de Análise Combinatória estudados e suas características. Neste momento serão enfatizadas as diferenças entre cada método de contagem e quando devem ser utilizados.



Os alunos serão orientados a fazer o registro no caderno para consultar nos momentos de estudo.

Parte III: Avaliação individual do entendimento dos alunos.

Como forma de analisar a construção dos conhecimentos e conceitos matemáticos acerca da Análise Combinatória, a professora entregará uma lista com 5 questões para serem resolvidas em sala de aula, de forma individual, com consulta ao material e sem o uso de calculadora.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Os alunos serão orientados a desenvolver com cuidado e seriedade, pois servirá de base para avaliação da prática pedagógica até o momento.

Lista de questões avaliativas

Lista de questões avaliativas

1. Uma senha de 6 dígitos será criada com o seguinte critério: os dois primeiros caracteres devem ser duas vogais distintas; os dois caracteres centrais devem ser dois algarismos quaisquer; e os dois últimos caracteres devem ser sinais escolhidos entre #, \$, % e @, que podem se repetir. Quantas senhas distintas podem ser criadas seguindo esse critério?

- a) 21 600 b) 24 000 c) 28 800 d) 32 000 e) 40 000

Resposta:

O alfabeto possui 26 letras, sendo 5 vogais; há 10 algarismos ao todo, e há 4 opções de sinais. Podemos sistematizar as opções:

5 4 10 10 4 4
V V A A S S

Por fim, basta multiplicar o número de possibilidades em cada etapa.

$$5 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 4 = 32\,000 \text{ senhas distintas.}$$

2. Uma família de 12 pessoas decidiu aproveitar as férias de fim de ano fazendo uma viagem do Rio de Janeiro (RJ) em direção a Fortaleza (CE) de ônibus. No momento da compra das passagens, havia 15 lugares vazios no ônibus. De quantas maneiras distintas é possível organizar essa família nos 15 lugares restantes do ônibus?

- a) $\frac{15!}{3!}$ b) $15!$ c) $12!$ d) $\frac{15!}{3! \cdot 12!}$ e) $15! \cdot 3!$

Resposta:

Dos 15 lugares, usaremos somente 12, pois estamos arranjando 12 pessoas em 15 lugares. Ou seja, agrupando 15 lugares de 12 em 12 considerando a sua ordem.

$$A_{15,12} = \frac{15!}{(15-12)!} = \frac{15!}{3!} \text{ maneiras diferentes de organizar a família.}$$



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

3. Por motivos de segurança, Renato decidiu alterar a sua senha das redes sociais. Para que ele não se esqueça de suas senhas, ele sempre escolhe usar três letras do seu nome seguidas do dia e do mês de nascimento. Sabendo que a senha antiga era “ren0203”, o total de senhas possíveis que ele pode criar para essa nova senha é:

- a) 120 b) 119 c) 118 d) 89 e) 19

Resposta:

O nome RENATO possui 6 letras que não se repetem. O dia e mês do nascimento não se alteram. Como estamos falando de uma senha, a ordem dos elementos importa.

Estamos utilizando 3 das 6 letras da palavra RENATO:

$$A_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

Porém, uma das senhas já foi utilizada por Renato, então subtraímos 1 das possibilidades:

$$120 - 1 = 119 \text{ novas senhas possíveis.}$$

4. O presidente de uma companhia deve organizar uma equipe para representar a empresa em um congresso internacional. Esse grupo deve ser formado por um vice-presidente, dois diretores administrativos e dois gerentes de marketing. A companhia tem disponível 4 pessoas para vice-presidente, 5 para diretores administrativos e 8 para gerentes de marketing. De quantas maneiras distintas o presidente dessa empresa pode escalar essa equipe?

Resposta:

Estamos falando de formar uma equipe, portanto a ordem dos elementos não importa. Então, precisamos fazer uma Combinação Simples para cada caso.

$$i) \text{ vice-presidente: } C_4^1 = \frac{4!}{1!(4-1)!} = \frac{4!}{1 \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 3!}{1 \cdot 3!} = 4$$

$$ii) \text{ diretores administrativos: } C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 3!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$iii) \text{ gerentes de marketing: } C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2 \cdot 1 \cdot 6!} = \frac{56}{2} = 28$$

Como são necessários todos os cargos para montar a equipe, ou seja, elas dependem umas das outras, vamos multiplicar as possibilidades:



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

$$4 \cdot 10 \cdot 28 = 1\,120 \text{ maneiras distintas de escalar a equipe.}$$

5. Quantos são os anagramas da palavra MATEMÁTICA?

Resposta:

Quando falamos em anagramas, estamos embaralhando as letras de uma palavra. A palavra MATEMÁTICA possui 10 letras, das quais o M se repete 2 vezes ($\alpha = 2$), A se repete 3 vezes ($\beta = 3$) e T se repete 2 vezes ($\gamma = 2$). Calculamos uma permutação com repetição:

$$P_{10}^{2,3,2} = \frac{10!}{2!3!2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 3! \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151.200 \text{ anagramas.}$$

Sistematização/Fechamento da Aula:

Para exercitar os conceitos explorados na aula, será encaminhada uma lista de exercícios envolvendo Combinação simples. Os alunos poderão se organizar em duplas e/ou trios. A professora irá entregar a lista de exercícios impressa, auxiliando os alunos quando solicitado e monitorando o seu desenvolvimento. Os alunos que não concluírem a lista em sala deverão terminar em casa.

Neste momento também será realizada a chamada para registrar a presença dos alunos.

Lista de exercícios 3 - Combinação Simples

1. Simplifique a expressão: $\frac{C_{n+1,n}^{+n+1}}{C_{n+1,1}}$

Resposta:

$$\begin{aligned} \frac{C_{n+1,n}^{+n+1}}{C_{n+1,1}} &= \frac{\frac{(n+1)!}{n!(n+1-n)!} + n+1}{\frac{(n+1)!}{1!(n+1-1)!}} = \frac{\frac{(n+1)!}{n!(1)!} + n+1}{\frac{(n+1)!}{1!(n)!}} = \frac{\frac{(n+1)(n)!}{n!} + n+1}{\frac{(n+1)!}{n!}} = \frac{\frac{(n+1)1}{1} + n+1}{\frac{(n+1)1}{1}} \\ &= \frac{(n+1)+n+1}{(n+1)} = \frac{2n+2}{n+1} = \frac{2(n+1)}{(n+1)} = 2 \end{aligned}$$

2. Sobre uma circunferência são marcados 6 pontos distintos. Quantos quadriláteros podemos traçar com vértices nesses pontos?

Resposta:



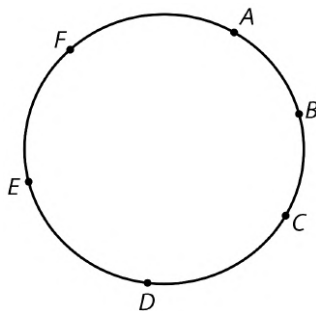
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central - Santa Rosa/RS - CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Um quadrilátero é formado por 4 vértices. Como os vértices estão sobre uma circunferência, não há o risco de estarem sobre uma mesma reta.



Basta combinarmos os 6 pontos, 4 em 4:

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2 \cdot 1} = \frac{30}{2} = 15 \text{ quadriláteros.}$$

3. Uma urna contém seis bolas de gude brancas e quatro bolas de gude vermelhas. Determine quantos conjuntos de quatro bolas podem ser retirados da urna se:

- a) elas podem ser de qualquer cor;
- b) duas devem ser brancas e duas devem ser vermelhas;
- c) todas devem ter a mesma cor.

Resposta:

a) *Ao todo temos $6 + 4 = 10$ bolas de gude.*

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4!6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210 \text{ conjuntos.}$$

b) i) brancas: $C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = \frac{30}{2} = 15 \text{ combinações.}$

e

ii) vermelhas: $C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \frac{12}{2} = 6 \text{ combinações.}$

Multiplicando as possibilidades:

$$15 \cdot 6 = 90 \text{ conjuntos.}$$

c) i) brancas: $C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = \frac{30}{2} = 15 \text{ combinações.}$

ou

ii) vermelhas: $C_4^4 = \frac{4!}{4!(4-4)!} = \frac{4!}{4!0!} = 1 \text{ combinação.}$

Somando as possibilidades:



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

$$15 + 1 = 16 \text{ conjuntos.}$$

4. Na despedida de um grupo de amigos, 36 abraços foram trocados. Sabendo que cada um abraçou todos os outros, quantos amigos estavam reunidos?

Resposta: Os abraços acontecem entre duas pessoas, em que a ordem não importa, pois o abraço é mútuo.

Assim, sabemos que a combinação de abraços entre x pessoas, de 2 em 2 é igual à 36.

$$\begin{aligned} C_x^2 &= 36 \\ \frac{x!}{2!(x-2)!} &= 36 \\ \frac{x(x-1)(x-2)!}{2!(x-2)!} &= 36 \\ \frac{x(x-1)}{2 \cdot 1} &= 36 \\ x(x-1) &= 36 \cdot 2 \\ x^2 - x - 72 &= 0 \end{aligned}$$

Encontrando as raízes da equação:

$$\begin{aligned} \Delta &= (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-72) = 1 + 288 = 289 \\ n &= \frac{1 \pm \sqrt{289}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 17}{2} \quad n' = \frac{1+17}{2} = 9 \quad n'' = \frac{1-9}{2} = -4 \end{aligned}$$

Como estamos tratando de operação com fatorial, consideramos o resultado positivo $n = 9$.

Portanto, haviam 9 amigos reunidos.

5. De quantas formas podemos escolher 4 cartas de um baralho de 52 cartas, sem levar em conta a ordem delas, de modo que em cada escolha haja pelo menos um rei?

Resposta: Como não levamos em conta a ordem das cartas, cada escolha é uma combinação. O número total de combinações é $\binom{52}{4}$. O número de combinações em que não aparece o rei é $\binom{48}{4}$, pois há 4 reais no baralho. Logo, a diferença $\binom{52}{4} - \binom{48}{4}$ é o número de combinações em que comparece ao menos um rei.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

$$C_{52}^4 = \frac{52!}{4!(52-4)!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48!}{4!48!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

simplificamos o 52 por 4; o 51 por 3; o 50 por 2:

$$13 \cdot 17 \cdot 25 \cdot 49 = 270\,725$$

$$C_{48}^4 = \frac{48!}{4!(48-4)!} = \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44!}{4!44!} = \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

simplificamos o 48 por 4; o 45 por 3; o 46 por 2:

$$12 \cdot 47 \cdot 23 \cdot 15 = 194\,580$$

Realizando a subtração:

$$270\,725 - 194\,580 = 76\,145 \text{ combinações com ao menos 1 rei.}$$

6. Em um grupo de 10 pessoas estão Anderson e Eduardo. Quantas comissões diferentes de 5 pessoas podemos formar:

- a) em que ambos estejam presentes?
- b) em que nenhum deles esteja presente?
- c) em que apenas um deles esteja presente?

Resposta:

- a) Anderson e Eduardo já estão na comissão. Das 8 pessoas restantes, escolhemos 3, sendo que a ordem não importa.*

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 = 56 \text{ comissões distintas.}$$

- b) Desconsideramos Anderson e Eduardo, nos restante 8 pessoas para formarmos a comissão de 5 pessoas.*

$$C_8^5 = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 = 56 \text{ comissões distintas.}$$

Percebam que (a) e (b) são combinações complementares.

- c) Se Anderson estiver presente, nos restam 8 pessoas (tiram os Anderson e Eduardo) para completar a comissão.*

$$C_8^4 = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2 \cdot 7 \cdot 5 = 70$$

O mesmo acontecerá com Eduardo.

*Pode estar presente o Anderson **ou** o Eduardo, então:*



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central - Santa Rosa/RS - CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

$$70 + 70 = 140 \text{ comissões distintas.}$$

7. Considere 10 pontos sendo 6 na reta r e 4 na reta s . De quantos modos diferentes podemos formar triângulos com vértices nesses pontos?



Resposta: Para que 3 pontos sejam vértices de um mesmo triângulo, eles não podem ser colineares. Dessa maneira, há duas possibilidades de formação de triângulos.

i) 2 pontos de r e 1 ponto de s :

$$C_6^2 \cdot C_4^1 = \frac{6!}{2!4!} \cdot \frac{4!}{1!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{2!} \cdot \frac{1}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 6 \cdot 5 \cdot 2 = 60$$

ii) 1 ponto de r e 2 pontos de s :

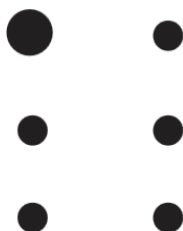
$$C_6^1 \cdot C_4^2 = \frac{6!}{1!5!} \cdot \frac{4!}{2!2!} = \frac{6 \cdot 5!}{5!} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!2!} = \frac{6}{1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6 \cdot 6 = 36$$

Pode acontecer o evento i ou o evento ii. Então:

$$60 + 36 = 96 \text{ modos diferentes de formar triângulos.}$$

DESAFIO

8. (Enem) A escrita Braille para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caractere é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais. Por exemplo, a letra A é representada por





MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

A quantidade total de caracteres que podem ser representados no sistema Braille é: a) 12 b) 31 c) 36 d) 63 e) 720

Resposta: Podemos ter 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 pontos em destaque. Para cada evento temos as combinações:

$$i) C_6^1 = \frac{6!}{1!5!} = \frac{6 \cdot 5!}{1!5!} = 6$$

$$ii) C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2!4!} = \frac{30}{2} = 15$$

$$iii) C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!3!} = \frac{120}{6} = 20$$

$$iv) C_6^4 = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!2!} = \frac{30}{2} = 15$$

$$v) C_6^5 = \frac{6!}{5!1!} = \frac{6 \cdot 5!}{5!1!} = 6$$

$$vi) C_6^6 = \frac{6!}{6!1!} = 1$$

Obs.: para os eventos acima também podemos considerar a propriedade das combinações. Os eventos i e v são complementares, assim como os eventos ii e iv.

Por fim, basta somar todas as possibilidades:

$$6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63 \text{ caracteres.}$$

9. (ENEM 2024) Um hospital tem 7 médicos cardiologistas e 6 médicos neurologistas em seu quadro de funcionários. Para executar determinada atividade, a direção desse hospital formará uma equipe com 5 médicos, sendo, pelo menos, 3 cardiologistas.

A expressão numérica que representa o número máximo de maneiras distintas de formar essa equipe é

A $\frac{7!}{4!} \times \frac{6!}{4!}$

B $\frac{7!}{3! \times 4!} \times \frac{6!}{2! \times 4!}$

C $\frac{7!}{3! \times 4!} + \frac{6!}{2! \times 4!} + \frac{5!}{1! \times 4!}$

D $\left(\frac{7!}{3! \times 4!} + \frac{6!}{2! \times 4!} \right) \times \left(\frac{7!}{4! \times 3!} + \frac{6!}{1! \times 5!} \right) \times \left(\frac{7!}{5! \times 2!} + \frac{6!}{0! \times 6!} \right)$

E $\left(\frac{7!}{3! \times 4!} \times \frac{6!}{2! \times 4!} \right) + \left(\frac{7!}{4! \times 3!} \times \frac{6!}{1! \times 5!} \right) + \left(\frac{7!}{5! \times 2!} \times \frac{6!}{0! \times 6!} \right)$



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Resposta:

i) com 3 cardiologistas: $C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!}$

e 2 neurologistas: $C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!4!}$

ou

ii) com 4 cardiologistas: $C_7^4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7!}{4!3!}$

e 1 neurologistas: $C_6^1 = \frac{6!}{1!(6-1)!} = \frac{6!}{1!5!}$

ou

iii) com 5 cardiologistas: $C_7^5 = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7!}{5!2!}$

e 0 neurologistas: $C_6^0 = \frac{6!}{0!(6-0)!} = \frac{6!}{0!6!}$

Montando a expressão, ficaremos com:

$$\left(\frac{7!}{3!4!} \cdot \frac{6!}{2!4!}\right) + \left(\frac{7!}{4!3!} \cdot \frac{6!}{1!5!}\right) + \left(\frac{7!}{5!2!} \cdot \frac{6!}{0!6!}\right)$$

10. (UFRGS 2024) Um time de futebol de salão dispõe de vinte jogadoras de futebol, entre as quais apenas Antônio, Maria e Eduarda são goleiras. O número de times possíveis, com cinco jogadoras, em que apenas a goleira joga em uma posição fixa, é

- (A) $C_{17,4}$.
- (B) $C_{20,4}$.
- (C) $C_{20,5}$.
- (D) $C_{3,1} + C_{17,4}$.
- (E) $C_{3,1} \cdot C_{17,4}$.

Resposta:

i) para 1 goleira, temos a combinação C_3^1

e

ii) para 4 jogadoras, temos a combinação $C_{(20-3)}^4 = C_{17}^4$

Montando a expressão, ficaremos com:

$$C_3^1 \cdot C_{17}^4$$

8. Avaliação

A avaliação da aprendizagem dos alunos será feita mediante aspectos qualitativos, como a participação nas propostas da aula, dedicação e colaboração com os colegas, e quantitativos, como o registro no caderno e a



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

realização dos exercícios propostos. Nesta aula também será realizada uma avaliação individual com consulta para verificar a compreensão dos conceitos de Análise Combinatória estudados, possibilitando à professora a análise da prática pedagógica e a identificação de lacunas na aprendizagem dos alunos para o planejamento de intervenções pedagógicas.

9. Bibliografias

ANDRADE, T. M. [org.] **Matemática interligada**: estatística, análise combinatória e probabilidade / obra coletiva; editora responsável. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Provas e gabaritos**. Disponível em: <<https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>>.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, 2017.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Do seu jeito: Matemática**: área de Matemática e suas Tecnologias: volume 3: Ensino Médio. 1. ed. São Paulo: Ática, 2024.

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar, 5**: combinatória, probabilidade. 7. ed. São Paulo: Atual, 2004.

10. Observações

Nesta aula tornou-se evidente a principal característica da turma: a conversa. Foi necessário chamar a atenção dos alunos para a aula diversas vezes. Muitos pareciam cansados e distraídos.

Enquanto realizava a explicação, suas expressões me indicavam que eles compreendiam o que estava sendo dito. por vezes até imaginei que a distração poderia ser causada por estarem achando as questões fáceis e repetitivas (a interpretação muda de uma questão para outra), mas ao mesmo tempo senti que eles não entendiam.

Por questão de tempo, não realizei o exemplo de combinações complementares. Como os alunos do fundo não enxergavam direito, aproveitei para apenas resolver no quadro o primeiro exemplo pronto. O exemplo de combinação em expressões algébricas também não foi resolvido, apenas conversei sobre ele e a sua semelhança com as expressões de arranjo. Como o último período estava reservado para as questões avaliativas do andamento



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

das aulas (não vale nota), a proposta de montar a sistematização com eles, no quadro, não se efetivou. Ao invés, projetei em *slide* e realizei a leitura e explicação relacionando com exemplos das aulas anteriores. Neste momento senti que eles não compreendiam o meu objetivo com aquele esquema, mas posteriormente reparei em muitos o utilizando na resolução das questões. É preciso lembrar novamente que eles estavam cansados e distraídos. Uma aluna me contou ter dormido 2 horas, mas mesmo assim prestou atenção na aula e se dedicou na realização das atividades. Não questionei o porquê dela ter dormido tão pouco à noite, porém é preciso ficar atento quando isso se torna um hábito e passa a prejudicar o aluno. A aluna em questão é muito empenhada e aplicada em sala de aula, mesmo com dificuldades.

Por fim, os alunos realizaram a atividade avaliativa com consulta no material, sem calculadora, e com consulta na sistematização projetada no quadro. Os alunos acharam mais difícil realizar os cálculos sem calculadora e, como não poderão usá-la na prova, estabeleci esta regra justamente para eles observarem a importância de simplificar as operações o máximo possível para facilitar o cálculo. A avaliação não valia nota, e tinha como objetivo orientar a prática pedagógica e servir como base para os alunos entenderem os seus pontos fracos. O resultado expresso na tabela a seguir considera o número de acertos, sendo no total 5 questões e considerando 3 como a média.

ALUNO	Questões certas de 5	ALUNO	Questões certas de 5
A	4,0	J	3,5
AE	0,5	K	-
AK	3,0	L	2,0
B	3,5	LN	3,0
BR	5,0	LG	-
C	3,0	LP	-
CE	3,0	M	2,0
D	2,0	MS	3,5
E	2,5	ME	2,0
EL	1,0	MM	5,0
F	3,0	N	3,0
G	4,0	S	3,0
GG	-	SW	2,0



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central - Santa Rosa/RS - CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

GH	2,5	T	4,0
GO	4,0	V	3,5
H	4,0	VD	3,5
HM	3,0	VM	2,0
I	2,5	Média da turma	2,98

A principal dificuldade foi na interpretação e escolha da técnica de contagem para resolver o problema. Acredito que com a tabela de sistematização, passará a ser mais fácil deles compreenderem o que devem analisar quando estiverem diante de uma questão.

Em resumo, as atividades ocuparam mais tempo do que o planejado, por isso precisei fazer escolhas na hora e priorizar o mais importante. Ainda tenho dificuldade em entender o ritmo da turma, pois há dias em que a aula rende, enquanto em outros não tanto. Claro que ainda estou no início do estágio, mas é preciso considerar estes fatores e me atentar nos próximos planejamentos.

Maria Vitória Moresco Dalcin

Aluna – Estagiária

Dr. Eduardo Padoin

Supervisor – Parte Concedente

Ma. Marília Boessio Tex de Vasconcellos

Professora Orientadora – Entidade Educacional



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Apêndice A: Apresentação de slides sobre Combinação simples.



❖ *Análise Combinatória* | Combinação Simples

o estudo da

Análise Combinatória

Combinação simples



Exemplo 1:

De quantas maneiras os 4 alunos podem formar duplas? Quais são elas?

❖ *Análise Combinatória* | Combinação Simples

A combinação é utilizada quando selecionamos elementos dentro de um conjunto maior, sem considerar a ordem em que são escolhidos.

Sejam n, p números naturais, com $p \leq n$, chama-se **combinação simples** de n elementos distintos tomados p a p todo subconjunto ou agrupamento **não ordenado** formado por p elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados.

$$C_{n,p}, C_n^p \text{ ou } \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

A **combinação simples** ocorre quando não repetimos nenhum elemento.

❖ *Análise Combinatória* | Combinação Simples

Exemplo 2:

Com 6 idosos e 5 jovens, quantas comissões de 6 pessoas, com exatamente 4 idosos, podem ser formadas?



❖ *Análise Combinatória* | Combinação Simples

Propriedade das Combinações

$$C_{n,p} = C_{n,n-p}$$

A propriedade das combinações é útil para simplificar os cálculos e é conhecida como **igualdade de combinações complementares**.

Podemos notar que:

$$C_{2,2} = C_{2,0} \text{ pois } C_{2,2} = \frac{2!}{2! \cdot 0!} = 1 \text{ e } C_{2,0} = \frac{2!}{0! \cdot 2!} = 1.$$

$\downarrow$
 $2+0=2$

$$C_{3,3} = C_{3,0} \text{ pois } C_{3,3} = \frac{3!}{3! \cdot 0!} = 1 \text{ e } C_{3,0} = \frac{3!}{0! \cdot 3!} = 1.$$

$\downarrow$
 $3+0=3$

$$C_{3,2} = C_{3,1} \text{ pois } C_{3,2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3 \text{ e } C_{3,1} = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3.$$

$\downarrow$
 $2+1=3$

$$C_{5,3} = C_{5,2} \text{ pois } C_{5,3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10 \text{ e } C_{5,2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10.$$

$\downarrow$
 $3+2=5$

❖ *Análise Combinatória* | Combinação Simples

Exemplo 3:

Determine a expressão correspondente a:

$$C_{100,98} = C_{100,2}$$

❖ *Análise Combinatória* | Combinação Simples

Exemplo 4:

Em um plano marcamos 6 pontos distintos, dos quais 3 nunca estão alinhados.

a) Quantos segmentos de reta podemos representar ligando-os 2 a 2?

b) Quantos triângulos podemos formar tendo sempre 3 desses pontos como vértices?

❖ *Análise Combinatória* | Combinação Simples

Exemplo 5:

Determine o valor de x em:

$$5 + C_{x,2} = x + 14$$



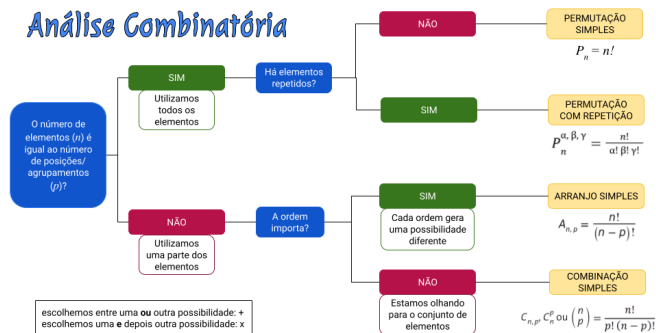
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Análise Combinatória



Fonte: A Autora (2025).



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Plano de Aula Semanal nº 4

Acadêmico: Maria Vitória Moresco Dalcin

Professora Orientadora: Ma. Marília Boessio Tex de Vasconcellos

Unidade Concedente: Instituto Federal Farroupilha – *Campus* Santa Rosa

Estágio – Turma / N° de alunos: 3º ano Ensino Médio / 35 alunos

Professor Regente da Classe: Eduardo Padoin

N° de Períodos semanal / Tempo de cada período: 3 / 50 minutos

Data/Horário: 03/10/2025 – 3 períodos - 7h30min às 10h

1 .Tema/Assunto:

Probabilidade

2. Objetos de Conhecimento:

Experimento aleatório, espaço amostral, evento, probabilidade de um evento simples

3. Habilidades relativas a BNCC:

(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

4 . Objetivos

- Relacionar o conceito de probabilidade em situações do mundo real, auxiliando na sua compreensão;
- Compreender as características de um experimento aleatório ao associá-lo com o lançamento de um dado, de uma moeda e do sorteio de cartas de baralho;
- Calcular a probabilidade de um evento ocorrer ou não ocorrer, interpretando o contexto de cada problema matemático;
- Desenvolver o raciocínio lógico através de situações-problema propostas, estimulando o uso de diferentes estratégias de resolução;



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

- Identificar potencialidades e dificuldades acerca dos conceitos explorados ao longo das aulas, através da resolução dos exercícios propostos.

5. Metodologia

Método Expositivo e Dialogado;
Atividade Prática.

6. Recursos

Materiais de uso comum, material impresso, *notebook*, *internet*, *slides*, projetor;
Materiais metodológicos: dados, moedas, cartas.

7. Desenvolvimento

Incentivação:

Antes de iniciar a aula, os alunos serão orientados a guardarem os celulares na caixa da turma.

No primeiro momento, a professora estagiária irá corrigir de 2 a 3 questões da lista de exercícios da aula anterior. As questões selecionadas serão aquelas com maior dúvida entre a turma.

Para dar início aos conceitos da aula, a professora irá distribuir o material impresso em que estão sistematizados os conceitos da aula (Apêndice A), para que os alunos possam acompanhar e completar com os exemplos desenvolvidos. Então, apresentará uma seleção de *slides* (Apêndice B) que irão guiar o estudo da Probabilidade.

 probabilidade

 material dos alunos - probabilidade

Primeiramente, a professora irá definir o que é a Probabilidade:

Probabilidade

A **teoria da Probabilidade** é um ramo da Matemática que cria, elabora e pesquisa modelos para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios.

Há certos fenômenos (ou experimentos) que, embora sejam repetidos muitas vezes e sob condições idênticas, não apresentam os mesmos resultados. Por exemplo:

- lançamento de uma moeda,
- lançamento de um dado,
- resultado de um jogo de roleta,
- resultado dos números sorteados em uma loteria, etc.

Pelo fato de não sabermos o resultado exato de um fenômeno aleatório, buscamos a probabilidade de determinado resultado ocorrer.





MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central - Santa Rosa/RS - CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

- A Probabilidade é um ramo da Matemática que cria, elabora e pesquisa modelos para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios. Há certos fenômenos (ou experimentos) que, embora sejam repetidos muitas vezes e sob condições idênticas, não apresentam os mesmos resultados. Por exemplo: o lançamento de uma moeda, lançamento de um dado, resultado de um jogo de roleta, resultado dos números sorteados em uma loteria, etc. Pelo fato de não sabermos o resultado exato de um fenômeno aleatório, buscamos a probabilidade de determinado resultado ocorrer. A probabilidade é uma maneira de medirmos a chance de algo acontecer.

Desenvolvimento da Aula:

- Vamos iniciar entendendo os termos utilizados no contexto da Probabilidade.

Parte I: Experimento Aleatório

A professora irá iniciar posicionando um baralho de cartas, um dado e uma moeda em cima de uma mesa. Então, a professora irá solicitar para que três alunos venham a frente. Cada aluno ficará com um objeto:

- Eu tenho aqui um dado comum, de 6 lados. Qual número vocês acham que irá cair quando o colega lançar o dado?

Resposta esperada: as respostas irão variar de 1 até 6. Alguns alunos também podem dizer que não é possível prever.

- O outro colega tem uma moeda, cujas faces são cara e coroa. Ao lançar a moeda, qual face vocês acham que irá cair?

Resposta esperada: as respostas irão variar entre cara e coroa. Alguns alunos também podem dizer que não é possível prever.

- Eu também trouxe um baralho de cartas comum, com os 4 naipes e 52 cartas.

A professora irá solicitar para que o último aluno sorteie uma carta, sem mostrar para os colegas.

- Qual naipe vocês acham que foi sorteado pelo colega?

Resposta esperada: as respostas irão variar entre ouro, copas, espada e paus. Alguns alunos também podem dizer que não é possível prever.

- Pela atividade que realizamos, percebemos que não é possível prever o resultado desses eventos. Eles são o que chamamos de experimentos aleatórios.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

✦ Probabilidade | Experimento Aleatório

EXPERIMENTO ALEATÓRIO

É qualquer experimento (ou fenômeno) cujo resultado não se pode prever, ou seja, depende do acaso.

Exemplos:

- lançamento de uma moeda e observar a face virada para cima;
- lançamento de um dado e observar a face virada para cima;
- sortearmos uma carta e observarmos o seu naipe.

Em um experimento (ou fenômeno) aleatório, o conjunto formado por todos os resultados possíveis é chamado espaço amostral (Ω). Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado evento.

- *Um experimento aleatório é qualquer experimento (ou fenômeno) cujo resultado não se pode prever, ou seja, depende do acaso.*

Exemplo:

- lançamento de uma moeda e observar a face virada para cima;
- lançamento de um dado e observar a face virada para cima;
- sortearmos uma carta e observarmos o seu naipe.

- *Não conseguimos prever qual será o resultado de um evento, mas podemos medir as chances de alguma coisa acontecer por meio da probabilidade.*

Parte II: Espaço Amostral

- *Voltando para os nossos experimentos, quais eram os resultados possíveis para cada objeto?*

Então, com a ajuda dos alunos, a professora irá esquematizar no quadro as possibilidades:

- lançar uma moeda $\rightarrow \Omega = \{K, C\}$; K: cara, C: coroa
- lançar um dado $\rightarrow \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- sortear uma carta do baralho $\rightarrow \Omega = \{\text{ouros, copas, espadas, paus}\}$

- *Estes são os nossos espaços amostrais.*



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

✦ Probabilidade | Espaço Amostral

ESPAÇO AMOSTRAL

É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.
É indicado pela letra grega Ω (lê-se “ômega”).

- **DISCRETO:** é possível contar os elementos;
- **NÃO DISCRETO (ou CONTÍNUO):** não é possível contar todos os elementos.

Exemplo: sortear um número real entre 1 e 2.

$$\Omega =]1, 2[$$

- O espaço amostral é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Indicamos pela letra grega Ω (lê-se “ômega”).

- Os espaços amostrais podem ser classificados em dois tipos:

O espaço amostral discreto é aquele em que é possível contar os seus elementos. Por exemplo, os espaços amostrais que registramos no quadro. O espaço amostral contínuo é aquele em que não conseguimos contar todos os seus elementos. Por exemplo, sortear um número real entre 1 e 2. Como tratamos do conjunto dos Números Reais, há infinitos números entre 1 e 2.

Parte III: Evento

- Outro conceito importante, que já usamos nas nossas discussões, é o evento. Um evento é qualquer subconjunto do espaço amostral. Indicamos por uma letra maiúscula.

- Voltando para os nossos experimentos, podemos definir alguns eventos.

Então, a professora irá registrar no quadro alguns exemplos de eventos:

- a) moedas $\rightarrow$ ocorrer cara $\rightarrow A = \{K\}$
- b) dado $\rightarrow$ ocorrer um número primo $\rightarrow B = \{2, 3, 5\}$
- c) baralho $\rightarrow$ ocorrer um naipe vermelho $\rightarrow C = \{\text{ouros, copas}\}$

Então, a professora apresentará os tipos de eventos elementar e equiprovável:



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

❖ Probabilidade | Evento

EVENTO

É qualquer subconjunto do espaço amostral.
É indicado por uma letra maiúscula.

- **EVENTO ELEMENTAR:** quando um evento é formado por apenas 1 elemento do espaço amostral;
- **EVENTO EQUIPROVÁVEL:** quando todos os eventos elementares têm a mesma probabilidade de ocorrência.

- O evento A , por exemplo, é classificado como um evento elementar; e o evento C , por exemplo, pode ser classificado como um evento equiprovável.

- Também podemos classificar os eventos entre certo e impossível.

❖ Probabilidade | Evento

- **EVENTO CERTO:** quando o evento é igual ao espaço amostral, ou seja, é certo que ocorrerá.

Exemplo: lançar um dado de seis lados → ocorrência de cair um número menor do que 7.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- **EVENTO IMPOSSÍVEL:** quando um evento é vazio, ou seja, não há possibilidade de ocorrer.

Exemplo: lançar um dado de seis lados → ocorrência de cair um número maior do que 6.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$E = \{\emptyset\}$$

Então, a professora irá projetar a tirinha:



GONSALES, Fernando. Níquel Náusea. Folha de S. Paulo, São Paulo, 27 set. 2002. Ilustrada, p. E11.

Por que ambos os cavalos escolheram “par”?



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Resposta: Pois há somente um resultado possível, a soma das patas sempre será 2, que é um número par. Este é um evento certo.

- E a probabilidade de cair um número ímpar nesta mesma situação?

Resposta esperada: É um evento impossível.

Após, a professora resolverá junto dos alunos os seguintes exemplos que serão projetados:

❖ **Probabilidade**

Exemplo 1:

Uma roleta contém números de 1 a 20. Considerando que ela será girada apenas uma vez:

a) Determine o espaço amostral Ω dos resultados possíveis.



Uma roleta contém números de 1 a 20. Considerando que ela será girada apenas uma vez:

a) Determine o espaço amostral Ω dos resultados possíveis.

b) Determine:

- o evento A, da ocorrência do número 13.
- o evento B, da ocorrência de um número ímpar.
- o evento C, da ocorrência de um número múltiplo de 5.

c) Represente por um diagrama de Venn o espaço amostral Ω e os eventos A, B e C.

Resposta:

a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 17, 18, 19, 20\}$

b) • ocorrência do número 13: $A = \{13\}$

• ocorrência de um número ímpar: $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

• ocorrência de um número múltiplo de 5: $C = \{5, 10, 15, 20\}$

c)

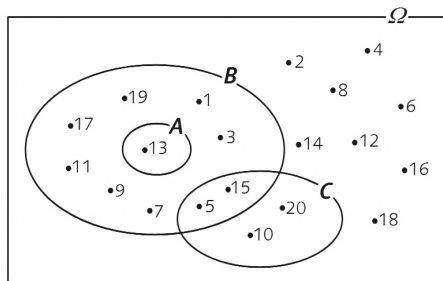


MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

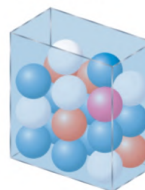


❖ **Probabilidade**

Exemplo 2:

Considere uma caixa com 20 bolinhas iguais, exceto pelas cores. Dessas bolinhas, 10 são azuis, 5 são brancas, 4 são vermelhas e 1 é rosa.

- a) Ao retirar aleatoriamente uma bolinha da caixa, é mais provável que ela seja rosa ou vermelha?
- b) Ao retirar aleatoriamente uma bolinha da caixa, é mais provável que ela seja vermelha ou azul?
- c) É impossível tirar uma bolinha rosa da caixa?
- d) Ao tirar uma bolinha da caixa, é certo que ela será azul?



Considere uma caixa com 20 bolinhas iguais, exceto pelas cores. Dessas bolinhas, 10 são azuis, 5 são brancas, 4 são vermelhas e 1 é rosa.

- a) Ao retirar aleatoriamente uma bolinha da caixa, é mais provável que ela seja rosa ou vermelha?
- b) Ao retirar aleatoriamente uma bolinha da caixa, é mais provável que ela seja vermelha ou azul?
- c) É impossível tirar uma bolinha rosa da caixa?
- d) Ao tirar uma bolinha da caixa, é certo que ela será azul?

Resposta:

- a) É mais provável que seja vermelha, pois há mais bolinhas vermelhas do que rosa na caixa.*
- b) É mais provável que seja azul, pois há mais bolinhas azuis na caixa.*
- c) Não. Apesar de pouco provável, ainda é possível retirar uma bolinha rosa da caixa.*
- d) Não. Há bolinhas de outras cores que podem ser retiradas da caixa.*

Parte IV: Probabilidade em um espaço amostral equiprovável

- Agora que já vimos alguns dos conceitos referentes à probabilidade, vamos enfim descobrir como calcular a probabilidade de um evento.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Em seguida, a professora irá formalizar o cálculo da probabilidade em um espaço amostral equiprovável:

❖ **Probabilidade em um espaço amostral equiprovável**

Dizemos que, se um fenômeno (ou experimento) aleatório tem espaço amostral Ω não vazio, finito e equiprovável, então a **probabilidade** de ocorrer um evento A com espaço amostral Ω é indicada por $p(A)$ e é dada por:

$$p(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \text{ ou}$$
$$p(A) = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número total de resultados possíveis}}$$

Fique atento

A probabilidade pode ser indicada na forma de fração, porcentagem ou decimal.

Para todo evento A , $0 \leq p(A) \leq 1$ ou $0\% \leq p(A) \leq 100\%$

Se um evento é **certo**, $p(A) = 1$

Se um evento é **impossível**, $p(A) = 0$

- A probabilidade de um experimento aleatório ocorrer é dada pelo número de resultados possíveis para o evento, dividido pelo total de resultados possíveis. A probabilidade pode ser indicada na forma de fração, decimal ou porcentagem, por isso dizemos que ela sempre será de zero a 1, ou de 0% a 100%. Se um evento é certo, quer dizer que podemos prever o resultado; se um evento é impossível, significa que não há nenhum resultado possível.

- Vejamos os exemplos:

❖ **Probabilidade**

Exemplo 3:

Ao lançar um dado de 6 lados, qual é a probabilidade de cair um número ímpar?



Ao lançar um dado de 6 lados, qual é a probabilidade de cair um número ímpar?

Resposta: Como vimos anteriormente, o nosso espaço amostral é igual ao número de lados dos dados.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

O nosso evento é a ocorrência de um número ímpar. Podemos representar por:

$$I = \{1, 3, 5\} \text{ e } n(I) = 3$$

Assim, a probabilidade de ocorrência de A é:

$$p(I) = \frac{n(I)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5 \rightarrow 50\%$$

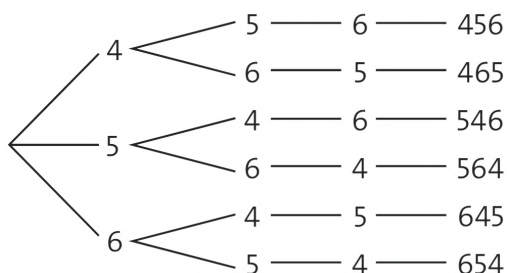
❖ *Probabilidade em um espaço amostral equiprovável*

Exemplo 4:

Considere os números de três algarismos obtidos ao permutar os algarismos 4, 5 e 6. Ao sortearmos uma dessas permutações, calcule a probabilidade de que ocorra o evento A: o número obtido é par.

Considere os números de três algarismos obtidos ao permutar os algarismos 4, 5 e 6. Ao sortearmos uma dessas permutações, calcule a probabilidade de que ocorra o evento A: o número obtido é par.

Resposta: Representamos as permutações em um diagrama de árvore:



$$\Omega = \{456, 465, 546, 564, 645, 654\} \text{ e } n(\Omega) = 6$$

As permutações que formam números pares são as terminadas em 4 ou 6.

$$A = \{456, 546, 564, 654\} \text{ e } n(A) = 4$$

Assim, a probabilidade de ocorrência de A é:



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

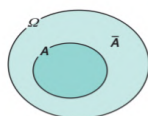
Fone: (55) 2013 0200

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \simeq 0,666 \rightarrow 66,6\%$$

Parte V: Probabilidade de um evento não ocorrer

- Nós também conseguimos calcular a probabilidade de um evento não ocorrer.

❖ Probabilidade em um espaço amostral equiprovável



Ω : espaço amostral
 $n(A)$: número de elementos do evento A
 $n(\bar{A})$: número de elementos do evento $\bar{A}$ (não ocorrer o A)

$$n(A) + n(\bar{A}) = n(\Omega)$$

A probabilidade de um evento A não ocorrer, indicada por $p(\bar{A})$ é igual a 1 menos a probabilidade de ele ocorrer:

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

- A probabilidade de um evento A não ocorrer, indicada por $p(\bar{A})$, é igual a 1 menos a probabilidade de ele ocorrer. A soma dos elementos dos eventos deve ser igual ao espaço amostral.

- Retomando o exemplo anterior, podemos calcular a probabilidade do número obtido não ser par (evento $\bar{A}$).

❖ Probabilidade em um espaço amostral equiprovável

Exemplo 5:

Considerando o exemplo anterior, calcule a probabilidade do evento A não ocorrer.

Considerando o exemplo anterior, calcule a probabilidade do evento A não ocorrer.

Resposta: Anteriormente calculamos que a probabilidade do evento A ocorrer é de 66,6% ou 0,666.

A probabilidade de um evento não ocorrer é expressa por



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

Assim, a probabilidade do evento A não ocorrer ($p(\bar{A})$) é:

$$p(\bar{A}) = 1 - 0,666 \simeq 0,333 \rightarrow 33,3\%$$

A fim de trabalhar com uma configuração diferente do diagrama de Venn, a professora dará sequência com o exemplo a seguir.

❖ *Probabilidade em um espaço amostral equiprovável*

Exemplo 6:

Em uma empresa foi realizada uma pesquisa para verificar a preferência de 35 funcionários em relação ao prato principal que será servido em um almoço de confraternização. Veja no quadro ao lado o resultado da pesquisa. Ao sortear um dos funcionários dessa empresa, qual é a probabilidade de ele:

- a) gostar somente de feijoada?
b) não gostar de lasanha?

Prato principal	Quantidade de funcionários
Lasanha	16
Feijoada	18
Macarronada	9
Lasanha e feijoada	5
Lasanha, feijoada e macarronada	3

Em uma empresa foi realizada uma pesquisa para verificar a preferência de 35 funcionários em relação ao prato principal que será servido em um almoço de confraternização. Veja no quadro ao lado o resultado da pesquisa. Ao sortear um dos funcionários dessa empresa, qual é a probabilidade de ele:

Prato principal	Quantidade de funcionários
Lasanha	16
Feijoada	18
Macarronada	9
Lasanha e feijoada	5
Lasanha, feijoada e macarronada	3

a) gostar somente de feijoada?

b) não gostar de lasanha?

*Resposta: Iniciamos construindo o diagrama de Venn.
O diagrama deve ser preenchido da seguinte forma:*



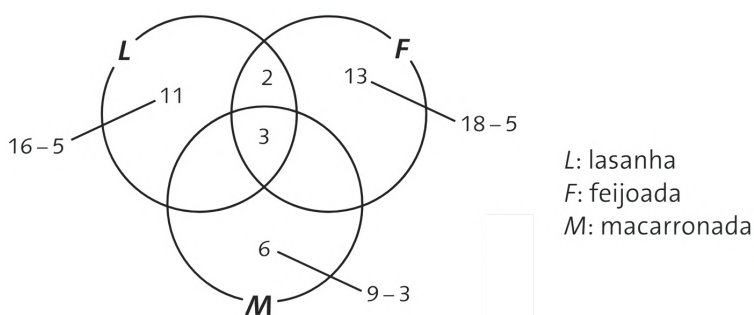
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

- I. Registramos a quantidade de funcionários que gostam dos três pratos.
- II. Registramos a quantidade de funcionários que gostam simultaneamente de dois pratos, subtraindo a quantidade de funcionários que gostam dos três pratos.
- III. Completamos com a quantidade de funcionários que gostam somente de um prato. Para isso, subtraímos a quantidade de funcionários já registrados no passo anterior.



- a) O número de elementos do espaço amostral é: $n(\Omega) = 35$
Vamos chamar A o evento “gostar somente de feijoada”. Assim, $n(A) = 13$

A probabilidade de o funcionário gostar somente de feijoada é:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{13}{35} \simeq 0,3714 \rightarrow 37,14\%$$

- b) Vamos chamar de B o evento “gostar de lasanha”. Assim, $n(B) = 16$

A probabilidade de o funcionário não gostar de lasanha é:

$$p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 1 - \frac{n(B)}{n(\Omega)} = 1 - \frac{16}{35} = \frac{35-16}{35} = \frac{19}{35} \simeq 0,5429 \rightarrow 54,28\%$$

Sistematização/Fechamento da Aula:

Para exercitar os conceitos explorados na aula, será encaminhada uma lista de exercícios envolvendo Probabilidade. Os alunos poderão se organizar em duplas e/ou trios. A professora irá entregar a lista de exercícios impressa, auxiliando os alunos quando solicitado e monitorando o seu desenvolvimento. Os alunos que não concluírem a lista em sala deverão terminar em casa.

Neste momento também será realizada a chamada para registrar a presença dos alunos.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

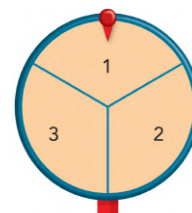
Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Lista de exercícios 4 - Probabilidade

1. Analise a imagem da roleta. Considerando o experimento “sortear um número na roleta”:

- a) Defina o espaço amostral e os eventos A: “ocorrer o número 2” e B: “ocorrer número ímpar”.
b) Calcule $p(B)$.



Resposta: Anteriormente calculamos que a probabilidade do evento A ocorrer é de 66,6% ou 0,666.

a) Espaço amostral são todos os resultados possíveis:

$$\Omega = \{1, 2, 3\}$$

Evento A: “ocorrer o número 2”:

$$A = \{2\}$$

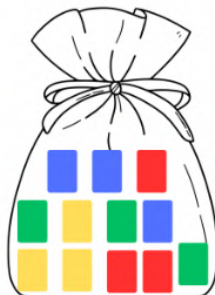
Evento B: “ocorrer número ímpar”:

$$A = \{1, 3\}$$

b) A probabilidade de ocorrer o evento B é expressa por

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{3} = 0,666 \simeq 66,6\%$$

2. Uma sacola contém fichas nas cores azul, amarelo, verde e vermelho. Sem olhar dentro da caixa, um estudante vai pegar uma ficha.



Leia com atenção as afirmações abaixo e indique (V) se a afirmação for verdadeira ou (F) se a afirmação for falsa. Caso seja falsa, corrija-a para que se torne verdadeira.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

- () O estudante retirar uma ficha azul é um evento possível.
() O estudante retirar uma ficha rosa é um evento certo.
() O estudante retirar uma ficha vermelha é um evento impossível.

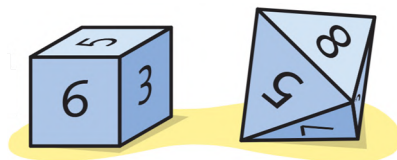
Resposta:

V;

F (pra ser um evento certo, todas as fichas deveriam ser rosas);

F (pois há a possibilidade de ele retirar 3 fichas vermelhas da sacola).

3. Foram lançados simultaneamente dois dados: um no formato de cubo com as faces numeradas de 1 a 6; outro no formato de octaedro regular com as faces numeradas de 1 a 8.



Qual é a probabilidade de:

- a) o mesmo número ser sorteado nos dois dados?
b) a soma dos números ser maior do que 10?
c) o produto dos números ser 6?
d) os dois números serem ímpares?
e) os números 4 e 6 não serem sorteados?

Resposta:

No lançamento de dois dados, o número de resultados possíveis é dado pela multiplicação dos seus lados

$$n(\Omega) = 6 \cdot 8 = 48$$

Quadro dos resultados possíveis para o lançamento dos dados:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(1, 7)	(1, 8)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)	(2, 7)	(2, 8)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)	(3, 7)	(3, 8)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)	(4, 7)	(4, 8)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)	(5, 7)	(5, 8)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)	(6, 7)	(6, 8)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

- a) Vamos denominar evento *A*: o mesmo número ser sorteado nos dois dados. Os dados possuem 6 números em comum, portanto há 6 possibilidades do mesmo número ser sorteado nos dois dados.

$$n(A) = 6$$

Assim, a probabilidade do evento *A* ocorrer é expressa por:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{48} = \frac{1}{8}$$

- b) Vamos denominar evento *B*: a soma dos números ser maior do que 10. Pelo quadro, observamos que há 10 resultados possíveis:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(1, 7)	(1, 8)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)	(2, 7)	(2, 8)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)	(3, 7)	(3, 8)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)	(4, 7)	(4, 8)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)	(5, 7)	(5, 8)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)	(6, 7)	(6, 8)

$$B = \{(3, 8); (4, 7); (4, 8); (5, 6); (5, 7); (5, 8); (6, 5); (6, 6); (6, 7); (6, 8)\}$$

$$n(B) = 10$$

Assim, a probabilidade do evento *B* ocorrer é expressa por:

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{10}{48} = \frac{5}{24}$$

- c) Vamos denominar evento *C*: o produto dos números ser 6. Os resultados possíveis são:

$$C = \{(1, 6); (6, 1); (2, 3); (3, 2)\}$$

$$n(C) = 4$$

Assim, a probabilidade do evento *C* ocorrer é expressa por:



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

$$p(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{4}{48} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

d) Vamos denominar evento D : os dois números serem ímpares.

Em cada dado, basta descartar os números pares, sobrando:

Dado de 8 lados: 1, 3, 5, 7

Dado de 6 lados: 1, 3, 5

Os resultados possíveis são:

$$n(D) = 4 \cdot 3 = 12$$

Assim, a probabilidade do evento D ocorrer é expressa por:

$$p(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{12}{48} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

e) Vamos denominar evento $\bar{E}$: os números 4 e 6 não serem sorteados.

Em cada dado, basta descartar os números 4 e 6, sobrando:

Dado de 8 lados: 1, 2, 3, 5, 7, 8

Dado de 6 lados: 1, 2, 3, 5

Os resultados possíveis são:

$$n(\bar{E}) = 6 \cdot 4 = 24$$

Portanto, há 24 possibilidades de os números 4 e 6 não serem sorteados.

Assim, a probabilidade do evento E não ocorrer é expressa por:

$$p(\bar{E}) = \frac{n(\bar{E})}{n(\Omega)} = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$$

4. Numa cidade, 30% dos homens são casados, 40% são solteiros, 20% são desquitados e 10% são viúvos. Um homem é escolhido ao acaso.

a) Qual a probabilidade de ele ser solteiro?

b) Qual a probabilidade de ele não ser casado?

c) Qual a probabilidade de ele ser solteiro ou desquitado?

Resposta: Podemos escrever as porcentagens na forma fracionária:



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

$$\frac{30}{100} = \frac{3}{10} \text{ são casados}$$

$$\frac{40}{100} = \frac{4}{10} \text{ são solteiros}$$

$$\frac{20}{100} = \frac{2}{10} \text{ são desquitados}$$

$$\frac{10}{100} = \frac{1}{10} \text{ são viúvos}$$

Ao todo temos: $3 + 4 + 2 + 1 = 10$ homens.

a) De 10 homens, 4 são solteiros, portanto

$$p(A) = \frac{4}{10} = 0,4 = 40\%$$

b) De 10 homens, 3 são casados, portanto 7 não são casados, então

$$p(B) = \frac{7}{10} = 0,7 = 70\%$$

*c) Já calculamos que a probabilidade de ele ser solteiro é de 0,4.
De 10 homens, 2 são desquitados, então*

$$p(C) = \frac{2}{10} = 0,2 = 20\%$$

*A probabilidade de sair um **ou** o outro significa a soma dos resultados possíveis. Assim,*

$$0,4 + 0,2 = 0,6 = 60\%$$

De forma simplificada, podemos trabalhar diretamente com as porcentagens trazidas no problema.

5. Em uma enquête, foram entrevistadas 80 pessoas sobre os meios de transporte que utilizavam para ir ao trabalho ou à escola. Dessas, sabemos que 12 utilizavam metrô e trem, 14, carro e trem, e 18, carro e metrô; 5 utilizavam os 3 meios de transporte: carro, metrô e trem. No total, 30 responderam carro, 42 responderam metrô, e 28 responderam trem. Qual é a probabilidade de que uma dessas pessoas, selecionada ao acaso, utilize:

- a) apenas metrô?
- b) apenas trem?
- c) trem e metrô, mas não carro?
- d) nenhum dos 3 veículos?
- e) apenas 1 desses veículos?



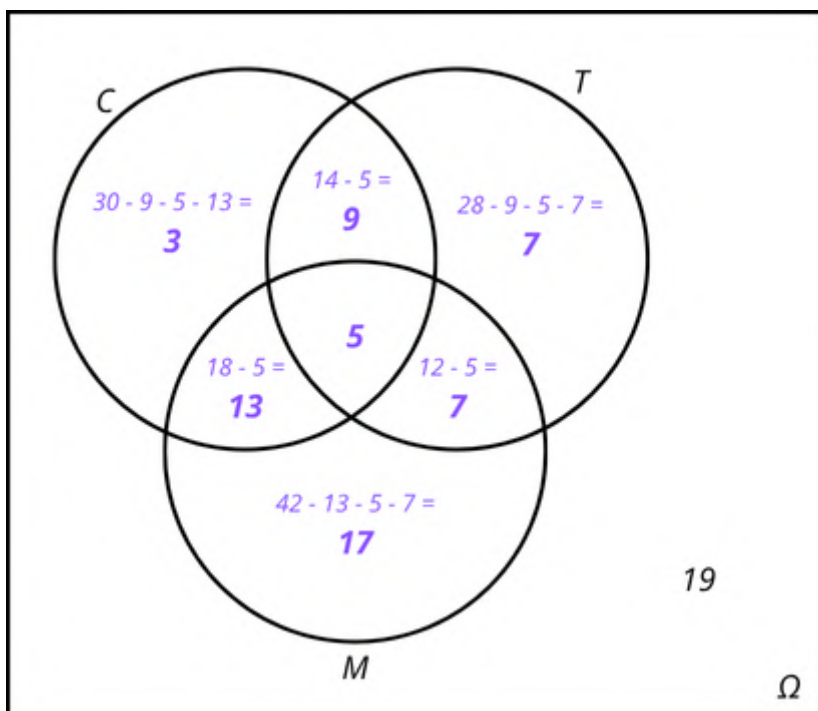
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Resposta: Podemos representar as informações por meio do diagrama de Venn.



Ao todo temos 61 respostas.

a) Das 80 pessoas entrevistadas, 17 responderam apenas metrô.

$$p(A) = \frac{17}{80} = 0,2125 = 21,25\%$$

b) Das 80 pessoas entrevistadas, 7 responderam apenas trem.

$$p(B) = \frac{7}{80} = 0,0875 = 8,75\%$$

c) Das 80 pessoas entrevistadas, 7 responderam trem e metrô, mas não carro.

$$p(C) = \frac{7}{80} = 0,0875 = 8,75\%$$

d) 80 pessoas foram entrevistadas, mas pelo diagrama obtemos 61 respostas. Portanto, 19 pessoas não utiliza nenhum dos três veículos.

$$p(D) = \frac{19}{80} = 0,2375 = 23,75\%$$



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

e) Das 80 pessoas entrevistadas, 7 responderam apenas trem, 17 responderam apenas metrô e 3 responderam apenas carro.

$$p(E) = \frac{7+17+3}{80} = \frac{27}{80} = 0,3375 = 33,75\%$$

6. Uma urna contém 2 bolas brancas e 2 bolas pretas, todas com o mesmo tamanho, diferenciadas apenas pela cor. Quantas bolas verdes idênticas às anteriores devem ser colocadas na urna de modo que, ao retirar uma bola ao acaso, a probabilidade de ela ser verde seja 50%?

Resposta: Para que, ao retirar uma bola ao acaso, a probabilidade de uma bola verde ser sorteada seja 50%, precisamos que a quantidade de bolas verdes seja igual à soma das outras bolas que já estão na urna. A urna contém 4 bolas no total, então basta adicionarmos 4 bolas verdes na urna para que esta probabilidade seja de 50%.

De forma algébrica podemos representar:

$$\begin{aligned}\frac{x}{2+2+x} &= 0,5 \\ \frac{x}{x+4} &= \frac{1}{2} \\ 2x &= 4 + x \\ x &= 4 \text{ bolas verdes.}\end{aligned}$$

DESAFIO

7. (ENEM 2023) Em um colégio público, a admissão no primeiro ano se dá por sorteio. Neste ano há 55 candidatos, cujas inscrições são numeradas de 01 a 55. O sorteio de cada número de inscrição será realizado em etapas, utilizando-se duas urnas. Da primeira urna será sorteada uma bola, dentre bolas numeradas de 0 a 9, que representará o algarismo das unidades do número de inscrição a ser sorteado e, em seguida, da segunda urna, será sorteada uma bola para representar o algarismo das dezenas desse número. Depois do primeiro sorteio, e antes de se sortear o algarismo das dezenas, as bolas que estarão presentes na segunda urna serão apenas aquelas cujos números formam, com o algarismo já sorteado, um número de 01 a 55.

As probabilidades de os candidatos de inscrição número 50 e 02 serem sorteados são, respectivamente,



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

- A** $\frac{1}{50}$ e $\frac{1}{60}$
- B** $\frac{1}{50}$ e $\frac{1}{50}$
- C** $\frac{1}{50}$ e $\frac{1}{10}$
- D** $\frac{1}{55}$ e $\frac{1}{54}$
- E** $\frac{1}{100}$ e $\frac{1}{100}$

Resposta:

I. unidades: 10 elementos (0 a 9)

II. dezenas: 6 elementos (0 a 5)

Candidato de inscrição número 50:

$$\frac{1}{10} \text{ e } \frac{1}{5} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{50}$$

(como as inscrições são numeradas a partir do número 01, ele não pode retirar o número 0 para as dezenas, se não formará o número 00)

Candidato de inscrição número 02:

$$\frac{1}{10} \text{ e } \frac{1}{6} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{60}$$

8. (ESPM-SP) Uma mãe, brincando com seus filhos, pediu a eles que escrevessem todos os anagramas da palavra ESCOLA. Cada anagrama foi escrito em um pedacinho de papel e este, colocado em uma caixa vazia. Retirando-se ao acaso um desses papéis, a probabilidade de que a palavra nele escrita tenha todas as consoantes juntas é:

- a) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{6}$
- b) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{5}$

Resposta:

O total de anagramas da palavra ESCOLA é: $P_6 = 6! = 720$. Este será o nosso espaço amostral.

$$n(\Omega) = 720$$



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Para calcular o número de permutações em que todas as consoantes estão juntas, consideramos SCL como uma “letra” e permutamos 4 elementos: $P_4 = 4! = 24$. A ordem de SCL pode variar, então permutamos os 3 elementos: $P_3 = 3! = 6$. Então, basta multiplicar: $24 \cdot 6 = 144$. Este é o nosso evento.

$$n(A) = 144$$

Portanto, a probabilidade será:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{144}{720} = \frac{72}{360} = \frac{36}{180} = \frac{18}{90} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}$$

8. Avaliação

A avaliação da aprendizagem dos alunos será feita mediante aspectos qualitativos, como a participação nas propostas da aula, dedicação e colaboração com os colegas, e quantitativos, como o registro no caderno e a realização dos exercícios propostos.

9. Bibliografias

ANDRADE, T. M. [org.] **Matemática interligada**: estatística, análise combinatória e probabilidade / obra coletiva; editora responsável. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Provas e gabaritos**. Disponível em: <<https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>>.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, 2017.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Do seu jeito: Matemática**: área de Matemática e suas Tecnologias: volume 3: Ensino Médio. 1. ed. São Paulo: Ática, 2024.

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar, 5**: combinatória, probabilidade. 7. ed. São Paulo: Atual, 2004.

<https://portaldacobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=46#>



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

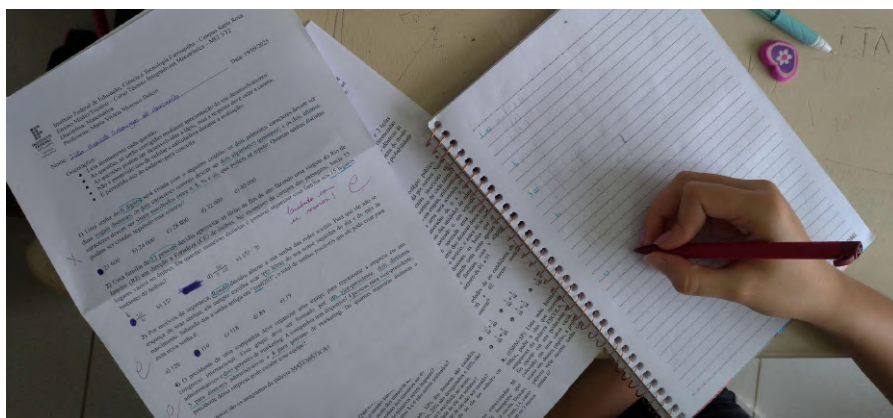
Fone: (55) 2013 0200

10. Observações

A aula foi marcada pela visita da professora orientadora e do professor supervisor para observação e avaliação da aula. Ao início os alunos estavam mais tímidos, mas aos poucos foram se envolvendo nas explicações. A atividade com o baralho, dado e moeda serviu, para além da proposta da aula, descontrair e despertar os alunos para a aula. Um dos alunos incluídos, sempre muito participativo, ficou muito feliz de participar da atividade.

Durante o período destinado à resolução dos exercícios, os alunos trabalharam em grupos e desenvolveram boa parte da lista. As principais discussões surgiram na questão 3, que tratava do lançamento de dois dados com números de lados distintos. A questão foi pensada propositalmente, considerando que eles desenvolvem os exercícios em sala, para explorarmos um tipo diferente de montagem do espaço amostral.

Neste caso, o espaço amostral é composto por pares ordenados, formados pelos lados de cada dado. Por se tratar de um espaço amostral grande, o qual dei a sugestão que montassem por meio de uma tabela, os alunos questionaram se havia um meio mais rápido de chegar na solução. Então, sugeri que eliminasse as possibilidades logicamente incorretas. Por exemplo, na letra B, para a soma dos números ser maior do que 10, sabemos que os lados 1 e 2 de ambos os dados não se habilitam com nenhum outro lado para tornar a proposição verdadeira. Já nas letras D e E, os alunos encontraram uma forma mais fácil para chegar na resposta sem a necessidade de listar as possibilidades, uma maneira que não havia percebido antes: em cada lado, basta descartar aquilo que se pede e multiplicar os lados restantes para encontrar o número de casos favoráveis.





MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Assim, considero que os objetivos foram atingidos e que a aula contribui para a aprendizagem dos alunos. Bem como, fico satisfeita com o trabalho aqui realizado.

Maria Vitória Moresco Dalcin

Aluna – Estagiária

Dr. Eduardo Padoin

Supervisor – Parte Concedente

Ma. Marília Boessio Tex de Vasconcellos

Professora Orientadora – Entidade Educacional



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Apêndice A: Material sobre Probabilidade.

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

A teoria da Probabilidade é um ramo da Matemática que cria, elabora e pesquisa modelos para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios. Pelo fato de não sabermos o resultado exato de um fenômeno aleatório, a probabilidade é uma maneira de medirmos a chance de determinado resultado ocorrer.

EXPERIMENTO ALEATÓRIO

É qualquer experimento (ou fenômeno) cujo resultado não se pode prever, ou seja, depende do acaso.

Em um experimento (ou fenômeno) aleatório, o conjunto formado por todos os resultados possíveis é chamado espaço amostral (Ω). Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado evento.

Exemplos:

- a) lançamento de uma moeda e observar a face virada para cima
- b) lançamento de um dado e observar a face virada para cima
- c) sortearmos uma carta e observarmos o seu naipe



ESPAÇO AMOSTRAL

É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

É indicado pela letra grega Ω (lê-se “ômega”).

Exemplos:

- **DISCRETO:** é possível contar os elementos;
- **NÃO DISCRETO (ou CONTÍNUO):** não é possível contar todos os elementos.

Exemplo: sortear um número real entre 1 e 2.

$$\Omega =]1, 2[$$

EVENTO

É qualquer subconjunto do espaço amostral.

É indicado por uma letra maiúscula.

Exemplos:



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

- **EVENTO ELEMENTAR:** quando um evento é formado por apenas 1 elemento do espaço amostral;
- **EVENTO EQUIPROVÁVEL:** quando todos os eventos elementares têm a mesma probabilidade de ocorrência;

- **EVENTO CERTO:** quando um evento é formado por apenas 1 elemento do espaço amostral;

Exemplo: lançar um dado de seis lados → ocorrência de cair um número menor do que 7.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- **EVENTO IMPOSSÍVEL:** quando um evento é vazio, ou seja, não há possibilidade de ocorrer.

Exemplo: lançar um dado de seis lados → ocorrência de cair um número maior do que 6.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$E = \{\emptyset\}$$

Exemplo 1.

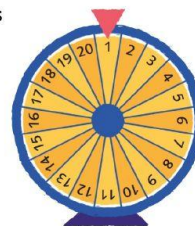
Uma roleta contém números de 1 a 20. Considerando que ela será girada apenas uma vez:

a) Determine o espaço amostral Ω dos resultados possíveis.

b) Determine:

- o evento A, da ocorrência do número 13.
- o evento B, da ocorrência de um número ímpar.
- o evento C, da ocorrência de um número múltiplo de 5.

c) Represente por um diagrama de Venn o espaço amostral Ω e os eventos A, B e C.





MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Exemplo 2.

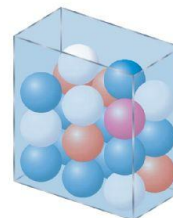
Considere uma caixa com 20 bolinhas iguais, exceto pelas cores. Dessas bolinhas, 10 são azuis, 5 são brancas, 4 são vermelhas e 1 é rosa.

a) Ao retirar aleatoriamente uma bolinha da caixa, é mais provável que ela seja rosa ou vermelha?

b) Ao retirar aleatoriamente uma bolinha da caixa, é mais provável que ela seja vermelha ou azul?

c) É impossível tirar uma bolinha rosa da caixa?

d) Ao tirar uma bolinha da caixa, é certo que ela será azul?



PROBABILIDADE EM UM ESPAÇO AMOSTRAL EQUIPROVÁVEL

Dizemos que, se um fenômeno (ou experimento) aleatório tem espaço amostral Ω não vazio, finito e equiprovável, então a probabilidade de ocorrer um evento A com espaço amostral Ω é indicada por $p(A)$ e é dada por:

$$p(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \text{ ou}$$

$$p(A) = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número total de resultados possíveis}}$$

Para todo evento A , $0 \leq p(A) \leq 1$ ou $0\% \leq p(A) \leq 100\%$

Se um evento é **certo**, $p(A) = 1$

Se um evento é **impossível**, $p(A) = 0$

Exemplo 3.

Ao lançar um dado de 6 lados, qual é a probabilidade de cair um número ímpar?



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Exemplo 4.

Considere os números de três algarismos obtidos ao permutar os algarismos 4, 5 e 6. Ao sortearmos uma dessas permutações, calcule a probabilidade de que ocorra o evento A : o número obtido é par.

PROBABILIDADE DE UM EVENTO NÃO OCORRER:

A probabilidade de um evento A não ocorrer, indicada por $p(\bar{A})$, é igual a 1 menos a probabilidade de ele ocorrer:

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

Exemplo 5.

Considerando o exemplo anterior, calcule a probabilidade do evento A não ocorrer.

Exemplo 6.

Em uma empresa foi realizada uma pesquisa para verificar a preferência de 35 funcionários em relação ao prato principal que será servido em um almoço de confraternização. Veja no quadro ao lado o resultado da pesquisa. Ao sortear um dos funcionários dessa empresa, qual é a probabilidade de ele:

- a) gostar somente de feijoadada?
- b) não gostar de lasanha?

Prato principal	Quantidade de funcionários
Lasanha	16
Feijoadada	18
Macarronada	9
Lasanha e feijoadada	5
Lasanha, feijoadada e macarronada	3



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA
Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740
Fone: (55) 2013 0200

Apêndice B: Apresentação de slides sobre Probabilidade.

introdução à Probabilidade

Probabilidade

A **teoria da Probabilidade** é um ramo da Matemática que cria, elabora e pesquisa modelos para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios.

Há certos fenômenos (ou experimentos) que, embora sejam repetidos muitas vezes e sob condições idênticas, não apresentam os mesmos resultados. Por exemplo:

- lançamento de uma moeda,
- lançamento de um dado,
- resultado de um jogo de roleta,
- resultado dos números sorteados em uma loteria, etc.

Pelo fato de não sabermos o resultado exato de um fenômeno aleatório, buscamos a probabilidade de determinado resultado ocorrer.



Probabilidade | Experimento Aleatório

EXPERIMENTO ALEATÓRIO

É qualquer experimento (ou fenômeno) cujo resultado não se pode prever, ou seja, depende do acaso.

Exemplos:

- lançamento de uma moeda e observar a face virada para cima;
- lançamento de um dado e observar a face virada para cima;
- sortearmos uma carta e observarmos o seu naipe.

Em um experimento (ou fenômeno) aleatório, o conjunto formado por todos os resultados possíveis é chamado espaço amostral (Ω). Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado evento.

Probabilidade | Espaço Amostral

ESPAÇO AMOSTRAL

É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. É indicado pela letra grega Ω (lê-se “ômega”).

- **DISCRETO**: é possível contar os elementos;
- **NÃO DISCRETO (ou CONTÍNUO)**: não é possível contar todos os elementos.

Exemplo: sortear um número real entre 1 e 2.

$$\Omega =]1, 2[$$

Probabilidade | Evento

EVENTO

É qualquer subconjunto do espaço amostral. É indicado por uma letra maiúscula.

- **EVENTO ELEMENTAR**: quando um evento é formado por apenas 1 elemento do espaço amostral;
- **EVENTO EQUIPROVÁVEL**: quando todos os eventos elementares têm a mesma probabilidade de ocorrência.

Probabilidade | Evento

- **EVENTO CERTO**: quando o evento é igual ao espaço amostral, ou seja, é certo que ocorrerá.

Exemplo: lançar um dado de seis lados $\rightarrow$ ocorrência de cair um número menor do que 7.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- **EVENTO IMPOSSÍVEL**: quando um evento é vazio, ou seja, não há possibilidade de ocorrer.

Exemplo: lançar um dado de seis lados $\rightarrow$ ocorrência de cair um número maior do que 6.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$E = \{\emptyset\}$$

Probabilidade | Evento



- Por que ambos os cavalos escolheram “par”?

Probabilidade

Exemplo 1:

Uma roleta contém números de 1 a 20. Considerando que ela será girada apenas uma vez:

- a) Determine o espaço amostral Ω dos resultados possíveis.





MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

❖ Probabilidade

Exemplo 1:

b) Determine:

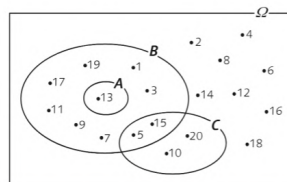
- o evento A, da ocorrência do número 13.
- o evento B, da ocorrência de um número ímpar.
- o evento C, da ocorrência de um número múltiplo de 5.



❖ Probabilidade

Exemplo 1:

c) Represente por um diagrama de Venn o espaço amostral Ω e os eventos A, B e C.

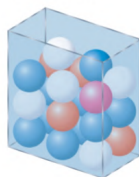


❖ Probabilidade

Exemplo 2:

Considere uma caixa com 20 bolinhas iguais, exceto pelas cores. Dessas bolinhas, 10 são azuis, 5 são brancas, 4 são vermelhas e 1 é rosa.

- a) Ao retirar aleatoriamente uma bolinha da caixa, é mais provável que ela seja rosa ou vermelha?
- b) Ao retirar aleatoriamente uma bolinha da caixa, é mais provável que ela seja vermelha ou azul?
- c) É impossível tirar uma bolinha rosa da caixa?
- d) Ao tirar uma bolinha da caixa, é certo que ela será azul?



Dizemos que, se um fenômeno (ou experimento) aleatório tem espaço amostral Ω não vazio, finito e equiprovável, então a **probabilidade** de ocorrer um evento A com espaço amostral Ω é indicada por $p(A)$ e é dada por:

$$p(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \text{ ou } p(A) = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número total de resultados possíveis}}$$

Para todo evento A, $0 \leq p(A) \leq 1$ ou $0\% \leq p(A) \leq 100\%$

Se um evento é **certo**, $p(A) = 1$

Se um evento é **impossível**, $p(A) = 0$

Fique atento

A probabilidade pode ser indicada na forma de fração, porcentagem ou decimal.

❖ Probabilidade

Exemplo 3:

Ao lançar um dado de 6 lados, qual é a probabilidade de cair um número ímpar?

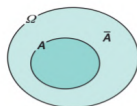


❖ Probabilidade em um espaço amostral equiprovável

Exemplo 4:

Considere os números de três algarismos obtidos ao permutar os algarismos 4, 5 e 6. Ao sortearmos uma dessas permutações, calcule a probabilidade de que ocorra o evento A: o número obtido é par.

❖ Probabilidade em um espaço amostral equiprovável



Ω : espaço amostral
 $n(A)$: número de elementos do evento A
 $n(\bar{A})$: número de elementos do evento $\bar{A}$ (não ocorrer o A)

$$n(A) + n(\bar{A}) = n(\Omega)$$

A probabilidade de um evento A **não ocorrer**, indicada por $p(\bar{A})$ é igual a 1 menos a probabilidade de ele ocorrer:

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

❖ Probabilidade em um espaço amostral equiprovável

Exemplo 5:

Considerando o exemplo anterior, calcule a probabilidade do evento A não ocorrer.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740
Fone: (55) 2013 0200

❖ *Probabilidade em um espaço amostral equiprovável*

Exemplo 6:

Em uma empresa foi realizada uma pesquisa para verificar a preferência de 35 funcionários em relação ao prato principal que será servido em um almoço de confraternização. Veja no quadro ao lado o resultado da pesquisa. Ao sortear um dos funcionários dessa empresa, qual é a probabilidade de ele:

Prato principal	Quantidade de funcionários
Lasanha	16
Feijoada	18
Macarronada	9
Lasanha e feijoada	5
Lasanha, feijoada e macarronada	3

- a) gostar somente de feijoada?
b) não gostar de lasanha?

Fonte: A Autora (2025).



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central - Santa Rosa/RS - CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Plano de Aula Semanal nº 5

Acadêmico: Maria Vitória Moresco Dalcin

Professora Orientadora: Ma. Marília Boessio Tex de Vasconcellos

Unidade Concedente: Instituto Federal Farroupilha – *Campus* Santa Rosa

Estágio – Turma / N° de alunos: 3° ano Ensino Médio / 35 alunos

Professor Regente da Classe: Eduardo Padoin

N° de Períodos semanal / Tempo de cada período: 3 / 50 minutos

Data/Horário: 10/10/2025 – 3 períodos - 7h30min às 10h

1 .Tema/Assunto:

Análise Combinatória e Probabilidade

2. Objetos de Conhecimento:

Análise Combinatória: princípio aditivo, Princípio Fundamental da Contagem (PFC), fatorial, permutação simples, permutação com repetição, arranjo simples, combinação simples.

Probabilidade: experimento aleatório, espaço amostral, evento, probabilidade de um evento simples.

3. Habilidades relativas a BNCC:

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

(EM13MAT315) Reconhecer um problema algorítmico, enunciá-lo, procurar uma solução e expressá-la por meio de um algoritmo, com o respectivo fluxograma.

(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

4 . Objetivos



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

- Diferenciar o princípio aditivo e o princípio multiplicativo ao interpretar enunciados envolvendo Análise Combinatória e/ou Probabilidade;
- Distinguir os tipos de técnicas de contagem ao interpretar enunciados de Análise Combinatória, reconhecendo as características de cada caso;
- Utilizar das operações com fatoriais para simplificar os cálculos em exercícios;
- Calcular a probabilidade de um evento ocorrer ou não ocorrer, interpretando o contexto de cada problema matemático;
- Desenvolver o raciocínio lógico através de situações-problema propostas, estimulando o uso de diferentes estratégias de resolução;
- Identificar potencialidades e dificuldades acerca dos conceitos explorados ao longo das aulas, através da resolução dos exercícios propostos.

5. Metodologia

Método Expositivo e Dialogado.

6. Recursos

Materiais de uso comum, material impresso, *notebook*, *internet*, *slides*, projetor.

7. Desenvolvimento

Incentivação:

Antes de iniciar a aula, os alunos serão orientados a guardarem os celulares na caixa da turma.

No primeiro momento, a professora estagiária destinará aproximadamente 30 minutos para correção de questões da lista de exercícios da aula anterior. As questões selecionadas serão aquelas com maior dúvida entre a turma.

Desenvolvimento da Aula:

Então, a professora estagiária irá lembrar os alunos que a avaliação ocorrerá na semana seguinte, bem como explicará que a aula desta semana será direcionada à retomada de conteúdos a partir da resolução de exercícios. Para isso, os alunos serão incentivados a desenvolver todos os exercícios nos momentos de aula, para que assim possam sanar suas dúvidas.

Os alunos poderão se organizar em duplas e/ou trios. A professora irá entregar a lista de exercícios impressa, auxiliando os alunos quando solicitado e monitorando o seu desenvolvimento. Os alunos que não concluírem a lista em sala deverão terminar em casa.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

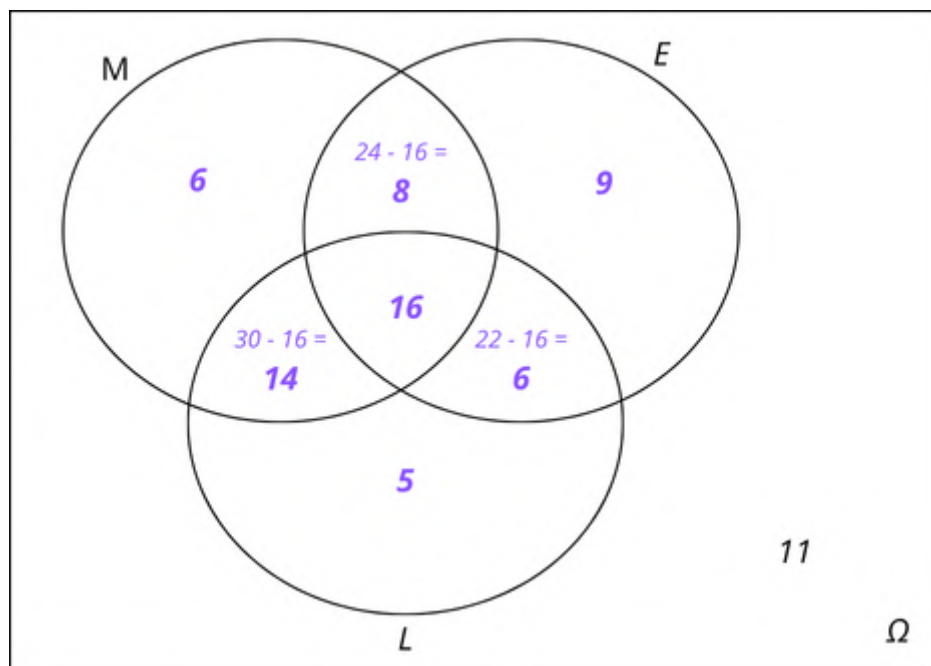
Lista de exercícios 5 - Revisão de Análise Combinatória e Probabilidade

1. Em um grupo de 75 jovens, 16 gostam de música, esporte e leitura; 24 gostam de música e esporte; 30 gostam de música e leitura; 22 gostam de esporte e leitura; 6 gostam somente de música; 9 gostam somente de esporte; e 5 jovens gostam somente de leitura.

a) Qual é a probabilidade de, ao escolher aleatoriamente 1 desses jovens, ele gostar de música?

b) Qual é a probabilidade de, ao escolher aleatoriamente 1 desses jovens, ele não gostar de qualquer dessas atividades?

Resposta: Podemos representar as informações por meio do diagrama de Venn.



Ao todo 75 pessoas responderam.

a) Das 75 pessoas entrevistadas,
 $6 + 8 + 16 + 14 = 44$ gostam de música

$$p(A) = \frac{44}{75} = 0,5866 = 58,66\%$$

b) Das 80 pessoas entrevistadas,
 $75 - 64 = 11$ não escolheram nenhuma das atividades.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

$$p(B) = \frac{11}{75} = 0,1466 = 14,66\%$$

2. Considerando os anagramas da palavra ALUNO,

a) quantos começam por vogal?

b) quantos apresentam as vogais AUO juntas nesta ordem?

c) quantos apresentam as vogais juntas, porém em qualquer ordem?

Resposta: A palavra possui 3 vogais e 2 consoantes.

*a) Primeiro representamos a restrição: **3** _ _ _ _*

Após definir a primeira letra, nos restam 4 letras para organizar nas 4 posições restantes, ou seja, calcular P_4 :

$$P_4 = 4! = 24$$

Como há 3 possibilidades de vogais para a primeira letra, precisamos multiplicar:

$$3 \cdot 24 = 72 \text{ anagramas da palavra ALUNO que começam com vogal.}$$

b) Pela necessidade de sempre estarem juntas e nessa ordem, consideramos (AUO) como uma só letra. Assim, ao todo teremos os elementos: L N (AUO). Então, basta calcularmos P_3 :

$$P_3 = 3! = 6 \text{ anagramas da palavra ALUNO em que as letras AUO ficam juntas e nessa ordem.}$$

c) i) Como as 3 vogais AOU devem estar juntas, mas podem aparecer em qualquer ordem, podemos calcular todas as maneiras de organizá-las:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

e

ii) Pela necessidade de sempre estarem juntas, consideramos (AOU) como uma só letra. Assim, ao todo teremos os elementos: (AOU) L N. Então, basta calcularmos P_3 :

$$P_3 = 3! = 6$$



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Assim, a quantidade de anagramas é:

$6 \cdot 6 = 36$ anagramas da palavra ALUNO em que as letras AOU aparecem juntas em qualquer ordem.

3. Quantos números naturais podem ser representados com todas as permutações dos algarismos do número 44.333.123?

Resposta:

$$P_8^{2,4} = \frac{8!}{4!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2 \cdot 1} = 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 840 \text{ números.}$$

4. Quantos números de dois algarismos podemos formar sabendo que o algarismo das dezenas corresponde a um múltiplo de 2 (diferente de zero) e o algarismo das unidades corresponde a um múltiplo de 3?

Resposta:

- I. algarismos múltiplos de dois e diferentes de zero: 2, 4, 6 e 8*
- II. algarismos múltiplos de 3: 0, 3, 6 e 9*

$$\begin{array}{c} \underline{4} \quad \underline{4} \\ D \quad U \end{array}$$

$$4 \cdot 4 = 16 \text{ maneiras}$$

5. Quantos números pares de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 6, 7, 8 e 9?

Resposta: Há 2 algarismos pares possíveis para a casa das unidades (6 e 8).

$$\underline{\quad} \underline{\quad} \underline{2}$$

Definido o número das unidades, o restante dos algarismos podem ser organizados como um arranjo:

$$A_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$$

Por fim, basta multiplicar as possibilidades:



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

$2 \cdot 20 = 40$ *números pares de 3 algarismos distintos.*

6. (ENEM 2020) Nos livros Harry Potter, um anagrama do nome do personagem “TOM MARVOLO RIDDLE” gerou a frase “I AM LORD VOLDEMORT”. Suponha que Harry quisesse formar todos os anagramas da frase “I AM POTTER”, de tal forma que as vogais e consoantes aparecessem sempre intercaladas, e sem considerar o espaçamento entre as letras. Nessas condições, o número de anagramas formados é dado por:

- (A) $9!$
- (B) $4! 5!$
- (C) $2 \times 4! 5!$
- (D) $\frac{9!}{2}$
- (E) $\frac{4!5!}{2}$

Resposta: A expressão possui 5 consoantes e 4 vogais.

i) para as vogais temos a permutação:

$$P_4 = 4!$$

ii) para as consoantes, temos 1 caso de repetição ($\alpha = 2$)

$$P_5^2 = \frac{5!}{2!}$$

Como são escolhas consecutivas, multiplicamos as possibilidades:

$$4! \cdot \frac{5!}{2!} = \frac{4!5!}{2!} = \frac{4!5!}{2} \text{ **LETRA E**}$$

7. (UFRGS 2022) Antônia e Francisca fazem parte de um grupo de dez médicas que atuam no cuidado de pacientes com COVID-19, em um hospital de Porto Alegre. Um outro hospital no Rio Grande do Sul está convidando um quarteto de médicas do grupo, do qual Antônia e Francisca fazem parte, para organizar um evento científico sobre a COVID-19.

A probabilidade de Antonia e Francisca fazerem parte desse quarteto convidado é



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

(A) $\frac{1}{5}$.

(B) $\frac{2}{5}$.

(C) $\frac{3}{14}$.

(D) $\frac{2}{15}$.

(E) $\frac{1}{35}$.

Resposta:

O número de elementos do espaço amostral Ω é: $n(\Omega) = C_{10,4}$

$$C_{10,4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210 \text{ possibilidades de equipes}$$

Fixamos Antônio e Francisca na equipe, o 2 lugares restantes podem ser ocupados pelas 8 médicas restantes, ou seja, $C_{8,2}$

$$C_{8,2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 4 \cdot 7 = 28 \text{ combinações}$$

A probabilidade é expressa por:

$$p(M) = \frac{C_{8,2}}{C_{10,4}} = \frac{28}{210} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

8. Calcule n na equação $\frac{(n+1)! - n!}{(n-1)!} = 7n$

Resposta:

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)! - n!}{(n-1)!} &= 7n \\ \frac{(n+1)(n)(n-1)! - n(n-1)!}{(n-1)!} &= 7n \\ \frac{(n+1)(n) - n}{1} &= 7n \\ (n+1)(n) - n &= 7n \\ (n+1)(n) &= 8n \\ (n+1) &= 8 \end{aligned}$$



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

$$n = 7$$

9. Analise os agrupamentos realizados com os símbolos @, \$ e % a seguir:

{@, \$, %}, {@, @, \$}, {@, @, %}, {@, @, @}, {@, \$, \$}, {\$, \$, %}, {\$, \$, \$}, {@, %, %}, {\$, %, %} e {%, %, %}

Podemos afirmar que os agrupamentos formados são:

- a) Todos os arranjos simples possíveis com os símbolos @, \$ e %.
- b) Todos os arranjos completos possíveis com os símbolos @, \$ e %.
- c) Todas as permutações simples possíveis com os símbolos @, \$ e %.
- d) Todas as combinações simples possíveis com os símbolos @, \$ e %.
- e) Todas as combinações completas possíveis com os símbolos @, \$ e %.

Resposta: Não há agrupamentos com elementos iguais mas organizados em ordens diferentes, portanto a ordem dos agrupamentos não é relevante, logo, temos uma combinação; percebe também que essas combinações admitem repetição, logo, temos uma combinação completa de 3 elementos tomados de 3 em 3.

Letra E

10. Durante uma palestra no auditório, há 6 cadeiras vazias consecutivas, assim, o número de maneiras distintas que Amanda, Beatriz, Carla e Daiane podem se sentar nessas cadeiras é igual a?

Resposta: Precisamos organizar 4 pessoas em 6 cadeiras. A ordem importa.

$$n = 6 \text{ e } p = 4$$

$$A_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360 \text{ maneiras distintas de sentar nas cadeiras.}$$

11. Num baile há 12 rapazes e 15 moças. Para uma certa dança, cada rapaz escolhe uma moça, formando, assim, 12 pares. De quantos modos diferentes estes pares podem ser formados?

Resposta: Precisamos organizar as 15 moças em 12 duplas. A ordem importa.

$$A_{15,12} = \frac{15!}{(15-12)!} = \frac{15!}{3!} = 15 \cdot 14 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 217\,945\,728\,000 \text{ maneiras distintas de formar duplas.}$$



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740
Fone: (55) 2013 0200

! Percebam que neste caso somente um dos grupos está fazendo a escolha (os rapazes). Como as moças não têm opção de escolha, não há chance de ocorrerem duplas repetidas. A ordem, portanto, irá importar, o que descarta o uso da Combinação Simples.

DESAFIO DE PROBABILIDADE CONDICIONAL

Um famoso paradoxo matemático, conhecido como paradoxo de Monty Hall, foi retratado em 1998 pelo professor Nicolau C. Saldanha. Nele, é apresentado o problema a seguir.

Em um programa de auditório, o convidado deve escolher uma dentre três portas. Atrás de uma das portas há um carro e atrás de cada uma das outras duas há um bode. O convidado ganhará o que estiver atrás da porta; devemos supor neste problema que o convidado prefere ganhar o carro. O procedimento para escolha da porta é o seguinte: o convidado escolhe inicialmente, em caráter provisório, uma das três portas. O apresentador do programa, que sabe o que há atrás de cada porta, abre neste momento uma das outras duas portas, sempre re-velando um dos dois bodes. O convidado agora tem a opção de ficar com a primeira porta que ele escolheu ou trocar pela outra porta fechada. Que estratégia deve o convidado adotar? Com uma boa estratégia, que probabilidade tem o convidado de ganhar o carro?



Triago Donizete Leme/
Arquivo da editora

SALDANHA, Nicolau C. *Como perder amigos e enganar pessoas*. Eureka, n. 1, p. 41-50, 1998.

O programa de televisão intitulado Let's Make a Deal (Vamos fazer um acordo) foi exibido de 1963 a 1976 nos Estados Unidos e era comandado pelo apresentador Monty Hall (1921-2017). O programa fez tanto sucesso que por diversas vezes foi relançado entre 1980 e 1991.

Resposta:



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

O cálculo da probabilidade de ganhar o carro mudando ou não de porta pode ser resolvido de maneira simples. Analise o quadro a seguir e suponha que o participante tenha inicialmente escolhido a porta **1** e que a distribuição dos bodes e do carro seja feita, em cada caso, sem repetição e de maneira aleatória.

Porta 1	Porta 2	Porta 3	Não mudando a porta	Mudando a porta
Carro	Bode	Bode	Ganha o carro	Ganha o bode
Bode	Carro	Bode	Ganha o bode	Ganha o carro
Bode	Bode	Carro	Ganha o bode	Ganha o carro

Quando o participante não muda de porta, a probabilidade de ele ganhar o carro é $\frac{1}{3}$. Contudo, fazendo a mudança no momento oportuno, a probabilidade de ganhar o carro passa a ser $\frac{2}{3}$. Isso se dá pelo fato de que, se não houver a mudança da porta escolhida, a única maneira de o participante ganhar o carro é ele ter escolhido a porta correta na primeira tentativa. Ou seja, é mais vantajoso mudar de porta.

Caso o participante escolha as portas 2 ou 3, a verificação é feita de maneira análoga.

Fonte dos dados: MLODINOW, Leonard. *O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009; SALDANHA, Nicolau C. *Como perder amigos e enganar pessoas*. Eureka, n. 1, p. 41-50, 1998.

Trocar não garante que irá ganhar, mas torna a vitória mais provável.

Sistematização/Fechamento da Aula:

A professora irá explicar para os alunos como funcionará a prova na semana seguinte: os alunos não poderão usar calculadora e terão as fórmulas de Análise Combinatória disponíveis no quadro.

O gabarito com desenvolvimento de todas as listas estará disponível no SIGAA para que os alunos possam estudar, e o *e-mail* da professora estará à disposição caso queiram sanar dúvidas durante a semana.

Neste momento também será realizada a chamada para registrar a presença dos alunos.

8. Avaliação

A avaliação da aprendizagem dos alunos será feita mediante aspectos qualitativos, como a dedicação e colaboração com os colegas ao trabalhar em grupo, e quantitativos, como o registro no caderno e a realização dos exercícios propostos.

9. Bibliografias



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

ANDRADE, T. M. [org.] **Matemática interligada**: estatística, análise combinatória e probabilidade / obra coletiva; editora responsável. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Provas e gabaritos**. Disponível em: <<https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>>.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, 2017.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Do seu jeito: Matemática**: área de Matemática e suas Tecnologias: volume 3: Ensino Médio. 1. ed. São Paulo: Ática, 2024.

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar, 5**: combinatória, probabilidade. 7. ed. São Paulo: Atual, 2004.

VACCARO, L. **Listas de Exercícios - Análise Combinatória**. Disponível em: <<https://www.ledovaccaro.com.br/listas-de-exercicios/>>.

10. Observações

Como já relatei anteriormente, a turma costuma aproveitar muito bem o tempo em sala para realização dos exercícios. Me surpreendi positivamente ao ver alguns alunos que normalmente estão cansados e desatentos participarem ativamente na resolução dos exercícios. Pude sanar muitas dúvidas de forma individual, fator que contribuiu para os alunos com mais dificuldades e que preferem ser atendidos individualmente.

Também me surpreendi ao ver em sala um aluno que estava sem vir há 3 semanas (participou somente da primeira aula). Ele não justificou as suas faltas, mas conversou comigo falando que sabia da sua responsabilidade e que estava estudando para recuperar o conteúdo. O seu tempo em aula foi muito proveitoso, sanou várias dúvidas e aproveitou da ajuda das colegas para estudar a resolução dos exercícios. Também indiquei que ele viesse na Monitoria de Matemática no contraturno.

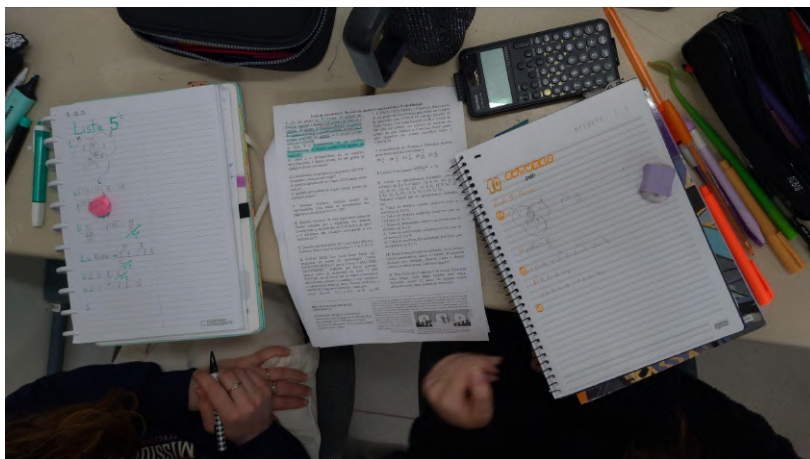
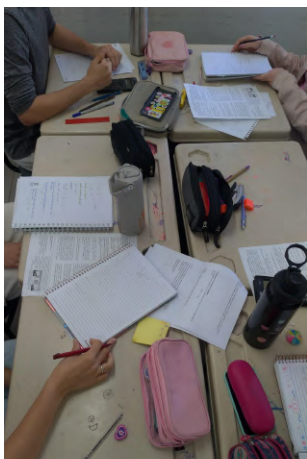
Parte da turma conseguiu concluir a lista de revisão em sala. Se encaminhando para o final da aula, as conversas se direcionaram para tópicos além da Matemática. Como muito haviam terminado a lista, deixei que conversassem com moderação para não atrapalhar os colegas.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740
Fone: (55) 2013 0200



Maria Vitória M. Dalcin

Maria Vitória Moresco Dalcin
Aluna – Estagiária

Eduardo Padoin

Dr. Eduardo Padoin
Supervisor – Parte Concedente

Marília Boessio Tex de Vasconcellos

Ma. Marília Boessio Tex de Vasconcellos
Professora Orientadora – Entidade Educacional



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Plano de Aula Semanal n° 6

Acadêmico: Maria Vitória Moresco Dalcin

Professora Orientadora: Ma. Marília Boessio Tex de Vasconcellos

Unidade Concedente: Instituto Federal Farroupilha – *Campus* Santa Rosa

Estágio – Turma / N° de alunos: 3° ano Ensino Médio / 35 alunos

Professor Regente da Classe: Eduardo Padoin

N° de Períodos semanal / Tempo de cada período: 3 / 50 minutos

Data/Horário: 17/10/2025 – 3 períodos - 7h30min às 10h

1 .Tema/Assunto:

Análise Combinatória e Probabilidade

2. Objetos de Conhecimento:

Análise Combinatória: princípio aditivo, Princípio Fundamental da Contagem (PFC), fatorial, permutação simples, permutação com repetição, arranjo simples, combinação simples.

Probabilidade: experimento aleatório, espaço amostral, evento, probabilidade de um evento simples.

3. Habilidades relativas a BNCC:

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

(EM13MAT315) Reconhecer um problema algorítmico, enunciá-lo, procurar uma solução e expressá-la por meio de um algoritmo, com o respectivo fluxograma.

(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

4 . Objetivos



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

- Resolver as questões dispostas na avaliação da construção da aprendizagem sobre os conceitos de Análise Combinatória e Probabilidade.
- Identificar potencialidades e dificuldades acerca dos conceitos explorados ao longo das aulas, através do desenvolvimento da avaliação escrita individual.

5. Metodologia

Método Expositivo e Dialogado.

6. Recursos

Materiais de uso comum, material impresso.

7. Desenvolvimento

Incentivação:

Antes de iniciar a aula, os alunos serão orientados a guardarem os celulares na caixa da turma.

No primeiro momento, a professora estagiária destinará aproximadamente 10 minutos para organizar as fórmulas de Análise Combinatória no quadro e para sanar dúvidas antes da prova.

Desenvolvimento da Aula:

Então, a professora irá orientar os alunos para guardar todo o material na mochila, permanecendo apenas com lápis, borracha e caneta em cima da mesa, não sendo permitido o uso de calculadora e celular durante a prova. As classes também serão melhor distribuídas em sala de aula.

As provas (Apêndice A) serão distribuídas e a professora irá realizar a leitura das questões em conjunto com a turma. Os alunos serão orientados a sanar dúvidas acerca das questões durante este momento de leitura, pois durante o momento de prova não será permitido. Também será enfatizado a obrigatoriedade da apresentação do desenvolvimento das questões.

☰ Avaliação - Análise Combinatória e Probabilidade

Avaliação de Análise Combinatória e Probabilidade

1. Em uma competição de atletismo, 8 velocistas disputam a prova final dos 100m rasos, na qual os 3 primeiros colocados vão ao pódio. De quantas maneiras distintas o pódio poderá ser formado?



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central - Santa Rosa/RS - CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Resposta: Por se tratar de um pódio, a ordem dos elementos importa. Então, tratamos de um Arranjo Simples.

$$A_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336 \text{ maneiras distintas de formar o pódio.}$$

2. Simplifique a expressão até torná-la irredutível:

$$\frac{(n+2)!}{n! + (n+1)!} =$$

Resposta:

$$\frac{(n+2)!}{n! + (n+1)!} = \frac{(n+2)(n+1)n!}{n! + (n+1)n!} = \frac{(n+2)(n+1)n!}{n![1 + (n+1)]} = \frac{(n+2)(n+1)}{1 + (n+1)} = \frac{(n+2)(n+1)}{(n+2)} = n + 1$$

3. Quantos triângulos podemos formar com 8 pontos distintos de uma circunferência?

Resposta: A ordem em que escolhemos os vértices não importa, portanto, resolvemos por meio de uma Combinação Simples.

$$C_{8,3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 = 56 \text{ triângulos.}$$

4. Considere todos os anagramas da palavra TEORIA.

a) Quantos são?

b) Quantos têm as letras TEO juntas nessa ordem?

c) Quantos anagramas apresentam as letras TEO juntas em qualquer ordem?

Resposta:

a) Basta calcular P_6 :

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \text{ anagramas da palavra TEORIA.}$$

b) Pela necessidade de sempre estarem juntas e nessa ordem, consideramos (TEO) como uma só letra. Assim, ao todo teremos os elementos: (TEO) R I A. Então, basta calcularmos P_4 :

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ anagramas da palavra TEORIA em que as letras TEO ficam juntas nessa ordem.}$$



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

- c) i) Como as 3 letras de TEO devem estar juntas, mas podem aparecer em qualquer ordem, podemos calcular todas as maneiras de organizá-las:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

e

- ii) Pela necessidade de sempre estarem juntas, consideramos (TEO) como uma só letra. Assim, ao todo teremos os elementos: (TEO) R I A. Então, basta calcularmos P_4 :

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Assim, a quantidade de anagramas é:

$$24 \cdot 6 = 144 \text{ anagramas da palavra TEORIA em que as letras TEO aparecem juntas em qualquer ordem.}$$

5. Considere os números de seis algarismos distintos formados pelos algarismos 3, 4, 5, 7, 8 e 9.

- a) Quantos números é possível formar?
b) Desses números, quantos são pares?

Resposta:

- a) Podemos sistematizar as possibilidades:

$$\begin{array}{cccccc} \underline{6} & \underline{5} & \underline{4} & \underline{3} & \underline{2} & \underline{1} \\ CM & DM & UM & C & D & U \end{array}$$

Por fim, basta multiplicar o número de possibilidades em cada etapa.

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \text{ números de 6 algarismos distintos.}$$

- a) Para o número formado ser par, o algarismo das unidades também deve ser par, ou seja, o número deve terminar em 4 ou 8. Ao todo temos 6 números. Podemos sistematizar as possibilidades:

$$\begin{array}{cccccc} \underline{5} & \underline{4} & \underline{3} & \underline{2} & \underline{1} & \underline{2} \\ CM & DM & UM & C & D & U \end{array}$$

Por fim, basta multiplicar o número de possibilidades em cada etapa.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 240 \text{ números pares de 6 algarismos distintos.}$$

6. Uma matriz quadrada 3×3 deve ser preenchida com 4 "zeros", 3 "cincos" e 2 "setes". De quantas maneiras podemos preencher essa matriz?

Resposta: A matriz quadrada 3×3 possui 9 elementos. Ao todo temos 4 "zeros", 3 "cincos" e 2 "setes" para preencher esta matriz, ou seja, 9 elementos, sendo que estes se repetem. Portanto, vamos calcular uma Permutação com Repetição.

$$P_9^{4,3,2} = \frac{P_9}{P_4 \cdot P_3 \cdot P_2} = \frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 = 1260 \text{ maneiras.}$$

7. Determine o valor de n no arranjo a seguir:

$$\frac{A_{n+1,3}}{A_{n,2}} = 3$$

Resposta:

$$\frac{\frac{(n+1)!}{[(n+1)-3]!}}{\frac{n!}{(n-2)!}} = 3 \Rightarrow \frac{\frac{(n+1)!}{(n-2)!}}{\frac{n!}{(n-2)!}} = 3 \Rightarrow \frac{(n+1)!}{(n-2)!} \cdot \frac{(n-2)!}{n!} = 3 \Rightarrow \frac{(n+1)!}{n!} = 3$$
$$\frac{(n+1)(n)!}{n!} = 3 \Rightarrow n + 1 = 3 \Rightarrow n = 2$$

8. Foram entrevistados 100 estudantes em uma enquete. Desses, 70 responderam que frequentavam um curso de Computação, 28 responderam que frequentavam um curso de Inglês e 10 responderam que frequentavam ambos, Computação e Inglês. Qual é a probabilidade de um desses estudantes, selecionado ao acaso:

- a) estar frequentando somente o curso de Computação?
- b) não estar frequentando nenhum desses cursos?

Resposta:

Podemos representar as informações por meio do diagrama de Venn.



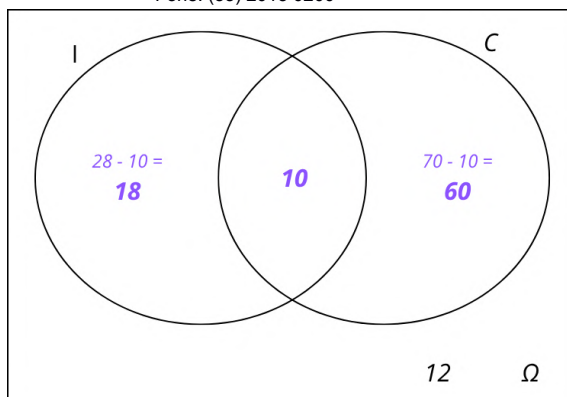
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200



Ao todo temos 88 respostas.

a) Das 100 pessoas entrevistadas, 60 cursam apenas Computação.

$$p(A) = \frac{60}{100} = 0,6 = 60\%$$

b) 100 pessoas foram entrevistadas, mas pelo diagrama obtemos 88 respostas. Portanto, 12 pessoas não frequentam nenhum dos cursos.

$$p(B) = \frac{12}{100} = 0,12 = 12\%$$

9. (UFRGS 2020) Um jogador, ao marcar números em um cartão de aposta, como o representado na figura abaixo, decidiu utilizar apenas seis números primos.

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

A probabilidade de que os seis números sorteados no cartão premiado sejam todos números primos é

A) $\frac{C_{17,6}}{C_{60,6}}$ B) $\frac{1}{C_{60,6}}$ C) $\frac{C_{60,6}}{C_{17,6}}$ D) $\frac{A_{17,6}}{A_{60,6}}$ E) $\frac{A_{60,6}}{A_{17,6}}$

Resposta:



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

O número de elementos do espaço amostral (Ω) pode ser definido pela Combinação Simples dos 60 números do cartão de 6 em 6, pois a ordem não importa, já que o conjunto de números resultantes será o mesmo.

$$n(\Omega) = C_{60,6}$$

A partir do conjunto de números mencionados no enunciado, são números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53 e 59. Para que o cartão de aposta do jogador seja formado apenas com números primos, é necessário escolher seis dos números apresentados anteriormente, ou seja,

$$n(P) = C_{17,6}$$

Portanto, a probabilidade de que os seis números sorteados no cartão premiado sejam todos números primos é:

$$p(P) = \frac{n(P)}{n(\Omega)} = \frac{C_{17,6}}{C_{60,6}} \quad \textbf{LETRA A}$$

10. (UFSM 2025) O aquecimento global e as mudanças climáticas decorrentes dele têm como causa principal o acúmulo de gases de efeito estufa na atmosfera. Um dos gases que mais contribui para esse efeito é o metano. A pecuária é a grande responsável pela emissão de gás metano.

Fonte: MERLINO, T. Aquecimento global: o Brasil está disposto a frear o aumento do rebanho de bois? Publicado em: 06 nov. 2024. Disponível em: <<http://ojoioetrigo.com.br/2024/11/aquecimento-global-o-brasil-esta-disposto-a-frear-o-aumento-do-rebanho-de-bois/>>. Acesso em: 27 dez. 2024. (Adaptado).

O setor pecuário tem organizado exposições de rebanhos. Uma cabanha da raça Nelore está preparando seu plantel de animais para uma exposição agropecuária. O rebanho é composto por 400 animais, distribuídos em 240 vacas, 100 bezerros e 60 touros. Durante a exposição, um único animal será escolhido para representar a morfologia do rebanho da cabanha.

A probabilidade de o animal escolhido

I → não ser um bezerro é de $\frac{3}{4}$.

II → ser um bezerro ou um touro é de $\frac{1}{5}$.

III → ser uma vaca ou um touro é de $\frac{3}{4}$.

IV → não ser um touro é de $\frac{17}{20}$.

Está(ão) correta(s)

A - apenas I.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

B - apenas II.

C - apenas III e IV.

D - apenas I, III e IV.

E - I, II, III, IV.

Resposta:

I. Dos 400 animais, 100 são bezerros, então 300 não são bezerros.

Portanto, a probabilidade de não ser um bezerro é:

$$p(\overline{B}) = \frac{300}{400} = \frac{3}{4}$$

II. Dos 400 animais, 100 são bezerros e 60 são touros:

$$p(B) = \frac{100}{400} = \frac{1}{4} \text{ ou } p(T) = \frac{60}{400} = \frac{3}{20} =$$

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{20} = \frac{5+3}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

III. Dos 400 animais, 240 são vacas e 60 são touros:

$$p(T) = \frac{3}{20} \text{ ou } p(V) = \frac{240}{400} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} =$$

$$\frac{3}{20} + \frac{3}{5} = \frac{3+12}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

IV. Dos 400 animais, 60 são touros:

$$p(\overline{T}) = 1 - \frac{3}{20} = \frac{20-3}{20} = \frac{17}{20}$$

LETRA D

Sistematização/Fechamento da Aula:

A professora irá recolher as provas. Neste momento também será realizada a chamada para registrar a presença dos alunos.

8. Avaliação

A avaliação da aprendizagem dos alunos será feita mediante prova escrita individual, considerando o desenvolvimento apresentado na resolução das questões propostas e as diferentes maneiras de se pensar nas questões.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

9. Bibliografias

ANDRADE, T. M. [org.] **Matemática interligada**: estatística, análise combinatória e probabilidade / obra coletiva; editora responsável. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Provas e gabaritos**. Disponível em: <<https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>>.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, 2017.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Do seu jeito: Matemática**: área de Matemática e suas Tecnologias: volume 3: Ensino Médio. 1. ed. São Paulo: Ática, 2024.

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar, 5**: combinatória, probabilidade. 7. ed. São Paulo: Atual, 2004.

10. Observações

A avaliação iniciou logo após a organização das fórmulas no quadro, pois os alunos não trouxeram dúvidas para sanar. Apenas duas alunas faltaram à aula por questões pessoais, e para recuperar será elaborada uma nova prova a ser realizada na semana seguinte, em turno inverso à aula, aplicada pelo professor regente.

Os alunos incluídos receberam a mesma prova, porém escolheram três questões para anular. Por meio deste ajuste eles têm mais tempo de resposta por questão e também é possível que eu verifique quais conceitos eles se sentem menos seguros (aquelas questões que irão anular).

Também solicitei para que os alunos me entregassem seus cadernos para que eu pudesse verificar os registros das aulas e a realização das listas de exercícios. Nem todos os alunos trouxeram, mas combinamos que me entregassem em outro momento caso queiram que eu verifique, já que não está sendo avaliado quantitativamente não é obrigatório. Ao analisar os cadernos, considerei que, nesta etapa, os alunos já têm certa independência e autoconhecimento para organizar seu material da forma que melhor lhes sirva. Enquanto alguns cadernos estavam muito bem organizados, com todos os exercícios feitos e com a sistematização do conteúdo, outros contavam com



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central - Santa Rosa/RS - CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

poucos exercícios e não haviam o conteúdo organizado de forma clara. O aluno com o maior índice de faltas, que conversou comigo na aula passada sobre estar recuperando o conteúdo, realizou todas as listas de exercícios e a lista de revisão. Há também alguns alunos que complementaram seus estudos com materiais e questões para além da aula. Acredito que essa diferenciação ficará clara também nos resultados da avaliação, pois o caderno reflete a dedicação do aluno para com seus estudos.

Alguns alunos terminaram a avaliação em pouco mais de um período, outros permaneceram em sala até o final da aula. Os alunos que terminaram antes foram orientados a sair da sala ou permanecer em silêncio, para não atrapalhar os colegas.

Aproveito para registrar aqui que, como prática da Instituição, os alunos podem solicitar um momento para sanar suas dúvidas com os professores no contraturno mediante agendamento. Um dos alunos incluídos já tem o hábito de fazer isto com o professor regente da turma na semana anterior a prova. Por este motivo, realizamos um momento para sanar dúvidas na quarta-feira (15/10) à tarde, das 13h30 até 15h50 (2h20min). Revisamos exemplos da primeira aula e também realizamos a maioria dos exercícios da revisão (aula que ele faltou).

Maria Vitória Moresco Dalcin

Aluna – Estagiária

Dr. Eduardo Padoin

Supervisor – Parte Concedente

Ma. Marília Boessio Tex de Vasconcellos

Professora Orientadora – Entidade Educacional



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central - Santa Rosa/RS - CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Apêndice A: Avaliação sobre Análise Combinatória e Probabilidade.



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha - *Campus* Santa Rosa

Ensino Médio/Técnico – Curso Técnico Integrado em Mecatrônica – MEI 3/T2

Disciplina: Matemática

Professora: Maria Vitória Moresco Dalcin

Peso: 2,5 pontos

Nome: _____ Data: 17/10/2025

Orientações:

- As questões só serão corrigidas mediante **apresentação do seu desenvolvimento**;
- As questões podem ser desenvolvidas a lápis, mas a **resposta deve estar a caneta**;
- **NÃO** é permitido uso de **celular e calculadora** durante a avaliação.

1) Em uma competição de atletismo, 8 velocistas disputam a prova final dos 100m rasos, na qual os 3 primeiros colocados vão ao pódio. De quantas maneiras distintas o pódio poderá ser formado?

2) Simplifique a expressão até torná-la irredutível:

$$\frac{(n+2)!}{n! + (n+1)!} =$$

3) Quantos triângulos podemos formar com 8 pontos distintos de uma circunferência?

4) Considere todos os anagramas da palavra TEORIA.

- Quantos são?
- Quantos têm as letras TEO juntas nessa ordem?
- Quantos anagramas apresentam as letras TEO juntas em qualquer ordem?

5) Considere os números de seis algarismos distintos, formados pelos algarismos 3, 4, 5, 7, 8 e 9.

- Quantos números é possível formar?
- Desses números, quantos são pares?

6) Uma matriz quadrada 3×3 deve ser preenchida com 4 "zeros", 3 "cinco" e 2 "setes". De quantas maneiras podemos preencher essa matriz?

7) Determine o valor de n no arranjo a seguir:

$$\frac{A_{n+1,3}}{A_{n,2}} = 3$$

8) Foram entrevistados 100 estudantes em uma enquête. Desses, 70 responderam que frequentavam um curso de Computação, 28 responderam que frequentavam um curso de Inglês e 10 responderam que frequentavam ambos, Computação e Inglês. Qual é a probabilidade de um desses estudantes, selecionado ao acaso:

- estar frequentando somente o curso de Computação?
- não estar frequentando nenhum desses cursos?



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

9) (UFRGS 2020) Um jogador, ao marcar números em um cartão de aposta, como o representado na figura abaixo, decidiu utilizar apenas seis números primos.

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

A probabilidade de que os seis números sorteados no cartão premiado sejam todos números primos é

A) $\frac{C_{17,6}}{C_{60,6}}$ B) $\frac{1}{C_{60,6}}$ C) $\frac{C_{60,6}}{C_{17,6}}$ D) $\frac{A_{17,6}}{A_{60,6}}$ E) $\frac{A_{60,6}}{A_{17,6}}$

10) (UFSM 2025) O aquecimento global e as mudanças climáticas decorrentes dele têm como causa principal o acúmulo de gases de efeito estufa na atmosfera. Um dos gases que mais contribui para esse efeito é o metano. A pecuária é a grande responsável pela emissão de gás metano.

Fonte: MERLINO, T. Aquecimento global: o Brasil está disposto a frear o aumento do rebanho de bois? Publicado em: 06 nov. 2024. Disponível em: <<http://ojoioeotriga.com.br/2024/11/aquecimento-global-o-brasil-esta-disposto-a-frear-o-aumento-do-rebanho-de-bois/>>. Acesso em: 27 dez. 2024. (Adaptado).

O setor pecuário tem organizado exposições de rebanhos. Uma cabanha da raça Nelore está preparando seu plantel de animais para uma exposição agropecuária. O rebanho é composto por 400 animais, distribuídos em 240 vacas, 100 bezerros e 60 touros. Durante a exposição, um único animal será escolhido para representar a morfologia do rebanho da cabanha.

A probabilidade de o animal escolhido

I → não ser um bezerro é de $\frac{3}{4}$.

II → ser um bezerro ou um touro é de $\frac{1}{5}$.

III → ser uma vaca ou um touro é de $\frac{3}{4}$.

IV → não ser um touro é de $\frac{17}{20}$.

Está(ão) correta(s)

A) apenas I.

B) apenas II.

C) apenas III e IV.

D) apenas I, III e IV.

E) I, II, III, IV.

Realize a prova com atenção!

Boa avaliação! :)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Plano de Aula Semanal nº 7

Acadêmico: Maria Vitória Moresco Dalcin

Professora Orientadora: Ma. Marília Boessio Tex de Vasconcellos

Unidade Concedente: Instituto Federal Farroupilha – *Campus* Santa Rosa

Estágio – Turma / N° de alunos: 3º ano Ensino Médio / 35 alunos

Professor Regente da Classe: Eduardo Padoin

N° de Períodos semanal / Tempo de cada período: 3 / 50 minutos

Data/Horário: 24/10/2025 – 3 períodos - 9h10min às 11h55min

1 .Tema/Assunto:

Matemática Financeira

2. Objetos de Conhecimento:

Juros Simples

3. Habilidades relativas a BNCC:

(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

4 . Objetivos

- Relacionar o conceito de juros em situações do mundo real, auxiliando na sua compreensão;
- Realizar cálculos com juros simples, interpretando o contexto de cada problema matemático, para encontrar o dado que se pede (juros, montante, taxa, tempo ou capital inicial);
- Perceber a relação entre o montante nos juros simples, a função do 1º grau e progressões aritméticas por meio da representação gráfica;
- Desenvolver o raciocínio lógico através de situações-problema propostas, estimulando o uso de diferentes estratégias de resolução;
- Identificar potencialidades e dificuldades acerca dos conceitos explorados ao longo da aula, através da resolução dos exercícios propostos.

5. Metodologia

Método Expositivo e Dialogado.

6. Recursos

Materiais de uso comum, material impresso, *notebook*, *internet*, *slides*, projetor.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740
Fone: (55) 2013 0200

7. Desenvolvimento

Incentivação:

Antes de iniciar a aula, os alunos serão orientados a guardar os celulares na caixa da turma.

No primeiro momento a professora estagiária irá realizar a chamada. Então, a professora irá explicar a organização das próximas aulas: nesta aula será realizada a correção da prova e o estudo dos Juros Simples. A próxima (e última) aula será destinada para o estudo dos Juros Compostos e finalização do estágio.

Após, serão entregues as provas realizadas na aula passada sobre o conteúdo de Análise Combinatória e Probabilidade. Para isso, serão destinados aproximadamente 20 minutos para correção das questões com maior índice de erro entre a turma.

Desenvolvimento da Aula:

Parte I: Juros Simples

Para dar início aos conceitos da aula, a professora irá distribuir o material impresso (Apêndice A) em que estão sistematizados os conceitos da aula, para que os alunos possam acompanhar e completar com os exemplos desenvolvidos. A professora apresentará uma seleção de *slides* (Apêndice B) que irão guiar o estudo dos Juros Simples.

 matemática financeira: juros simples  material dos alunos - juros simples

Primeiramente, a professora irá definir o que são os Juros:

Juros

Quando uma pessoa realiza um empréstimo no banco, ela deve pagar, além da quantia emprestada, um valor a mais, correspondente ao juro, isto é, um tipo de “aluguel” pelo período em que o dinheiro ficou emprestado.

Outra circunstância envolvendo juro acontece quando uma pessoa faz uma aplicação de certa quantia, seja em caderneta de poupança ou em outro investimento. Nesse caso, a pessoa recebe juro conforme o período em que essa quantia ficou aplicada.

Quando o pagamento de uma fatura é efetuado com atraso, esta é acrescida de juro correspondente ao tempo de atraso.

Isto ocorre pois o valor do dinheiro muda de acordo com o referencial de tempo que utilizamos.





MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

- Os juros aparecem em operações financeiras como uma forma de “aluguel”.
Em que situações pagamos juros?

Resposta esperada: Em empréstimos no banco, comprar à prazo, etc.

- Quando uma pessoa realiza um empréstimo no banco, por exemplo, além da quantia emprestada ela deverá pagar também um valor a mais pelo período em que o dinheiro ficou emprestado. Este valor a mais corresponde ao juro.

- Vamos iniciar entendendo os termos utilizados no contexto dos Juros.

❖ Termos da Matemática Financeira

- **Capital (c):** quantia em dinheiro no início da aplicação para ser investida ou emprestada.
- **Juro (j):** rendimento, acréscimo ou "aluguel" pago pelo empréstimo de certa quantia.
- **Tempo (t):** período em que certa quantia é investida ou emprestada, podendo ser indicado em dias, meses, bimestres, anos, etc.
- **Taxa de juro (i):** porcentagem que se recebe por uma aplicação ou se paga pelo "aluguel" de um capital por determinado período.
- **Montante (M):** soma do capital com o juro.

A professora irá orientar os alunos para que destaquem no material o significado de cada letra.

- A taxa pode ser representada de duas maneiras:

❖ Termos da Matemática Financeira

A taxa de juros pode ser representada de duas formas:

Taxa Percentual: quando representa os juros de 100 unidades de capital durante o período financeiro a que se refere:
Exemplo: 0,7% a.m.

usada para referenciar a taxa de juros

Taxa Unitária: quando representar os juros de uma unidade de capital durante o período financeiro a que se refere:
Exemplo: 0,007 a.m.

usada para os cálculos

- Ao falarmos sobre os juros, nos referimos de maneira percentual, por exemplo: uma aplicação com juros de 0,07% ao mês. Porém, ao calcular, precisamos sempre converter a taxa para o seu valor unitário (ou decimal). Neste caso, 0,7% é igual a 0,007.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Então, a professora apresentará os Juros Simples com o auxílio de *slides*.

❖ Juros Simples

Os **Juros Simples** ocorrem quando a taxa de juros incide sempre apenas sobre o capital inicial. Logo, o valor dos juros é o mesmo do início ao final do período.

$$J = C \cdot i \cdot t$$

$$M = C + J$$

- J : juro
- C : capital inicial
- i : taxa de juros simples (na forma decimal/unitária)
- t : período de tempo
- M : montante

No mercado financeiro, pouquíssimas são as transações que adotam o regime de juro simples, com exceção de aplicações de curtíssimo prazo.

- Os *Juros Simples* ocorrem quando a taxa de juros incide sempre sobre o capital inicial, isto faz com que a taxa de juros seja a mesma durante todo o período. Na vida real, são poucos os casos de operações financeiras que adotam o juro simples.

Após, a professora resolverá junto dos alunos o seguinte exemplo que será projetado:

❖ Juros Simples

Tainá decidiu aplicar, por 5 meses, R\$ 1.000,00 em uma aplicação à taxa de juros simples de 1% ao mês. Para saber o valor que teria na conta após 5 meses, ela organizou as informações em uma tabela.

Período	Juros (em reais)	Montante (em reais)
Após 1 mês	$0,01 \cdot 1 \cdot 1000 = 10$	$1000 + 10 = 1010$
Após 2 meses	$0,01 \cdot 2 \cdot 1000 = 20$	$1000 + 20 = 1020$
Após 3 meses	$0,01 \cdot 3 \cdot 1000 = 30$	
Após 4 meses		
Após 5 meses		

Tainá decidiu aplicar, por 5 meses, R\$ 1.000,00 em uma aplicação à taxa de juros simples de 1% ao mês. Para saber o valor que teria na conta após 5 meses, ela organizou as informações em uma tabela.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central - Santa Rosa/RS - CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Período	Juros (em reais)	Montante (em reais)
Após 1 mês	$0,01 \cdot 1 \cdot 1000 = 10$	$1000 + 10 = 1010$
Após 2 meses	$0,01 \cdot 2 \cdot 1000 = 20$	$1000 + 20 = 1020$
Após 3 meses	$0,01 \cdot 3 \cdot 1000 = 30$	
Após 4 meses		
Após 5 meses		

- Como poderíamos completar o restante da tabela?

Resposta: Basta seguirmos o padrão. Na coluna dos juros multiplicamos a taxa unitária pelo tempo e pelo capital inicial. Na coluna do montante, somamos o capital inicial aos juros encontrados.

Período	Juros (em reais)	Montante (em reais)
Após 1 mês	$0,01 \cdot 1 \cdot 1000 = 10$	$1000 + 10 = 1010$
Após 2 meses	$0,01 \cdot 2 \cdot 1000 = 20$	$1000 + 20 = 1020$
Após 3 meses	$0,01 \cdot 3 \cdot 1000 = 30$	$1\ 000 + 30 = 1\ 030$
Após 4 meses	$0,01 \cdot 4 \cdot 1\ 000 = 40$	$1\ 000 + 40 = 1\ 040$
Após 5 meses	$0,01 \cdot 5 \cdot 1\ 000 = 50$	$1\ 000 + 50 = 1\ 050$

Qual é a quantia referente aos juros e ao montante após 3 anos de aplicação?

Resposta: Para não precisarmos completar a tabela até o final do 3º ano, vamos utilizar a fórmula do Juros Simples.

C = 1000 reais,

Taxa = 0,01 a.m.

Tempo/período = 3 anos

Como nossa taxa é expressa “ao mês”, convertemos os 3 anos em meses:

$$3 \cdot 12 = 36 \text{ meses}$$

Agora resta calcular os Juros Simples:

$$J = 1000 \cdot 0,01 \cdot 36 = 360 \text{ reais}$$

O Montante é a soma do Capital Inicial com os Juros acumulados.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

$$M = 1000 + 360 = 1360 \text{ reais.}$$

Então, a professora apresentará os principais períodos de capitalização e o significado de suas siglas.

❖ Períodos de Capitalização

Obs.: A taxa deve ser compatível com a unidade de tempo considerada.

Contagem de tempo:

- ✓ 1 mês = 30 dias;
- ✓ Mensal = 1 mês;
- ✓ Bimestre = 2 meses;
- ✓ Trimestre = 3 meses;
- ✓ Quadrimestre = 4 meses;
- ✓ Semestre = 6 meses;
- ✓ Ano = Regra do banqueiro
(todo ano é bancário, então o ano possui 360 dias corridos).

Períodos de Capitalização:

- a.a. – ao ano
- a.s. – ao semestre
- a.q. – ao quadrimestre
- a.t. – ao trimestre
- a.b. – ao bimestre
- a.m. – ao mês
- a.d. – ao dia

- A conversão entre os períodos, nos Juros Simples, ocorre de forma semelhante à realizada no exemplo anterior.

❖ Conversão de Taxas

PERÍODO MAIOR → PERÍODO MENOR

Divide-se a taxa pela quantidade de períodos menores equivalentes ao do maior.

Converter 15% ao ano em taxa
semestral.

Se em um ano tem 2 semestres, então
devemos dividir 15 por 2.
Assim 15% a.a = 7,5% a.s.

Converter 15% ao ano em taxa
mensal

Como em um ano tem 12 meses,
temos que dividir 15 por 12.
Assim 15% a.a = 1,25% a.m

❖ Conversão de Taxas

PERÍODO MENOR → PERÍODO MAIOR

Multiplica-se a taxa pela quantidade de períodos menores
equivalentes ao maior.

Converter 2% ao trimestre em taxa
semestral.

Como em um semestre existem 2
trimestres, então devemos multiplicar
2% por 2.
Assim 2% a.t = 4% a.s.

Converter 2% ao trimestre em taxa
anual.

Como em um ano existem 4 trimestres,
então devemos multiplicar 2% por 4.
Assim 2% a.t = 8% a.a.

Em regime de juros
simples, duas taxas
proporcionais são
equivalentes.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

- *No regime de Juros Simples, taxas proporcionais, ou seja, proporcionais em relação ao tempo, são também equivalentes, isto é, produzem os mesmos juros sobre as mesmas condições.*

- *Vejamos o exemplo a seguir:*

❖ *Juros Simples*

Exemplo 2:

Juliana tomou emprestada certa quantia a ser paga ao final de 1 ano e 2 meses a uma taxa de juro simples de 2,5% a.m. Sabendo que ao final desse período Juliana pagou R\$ 1 822,50, determine a quantia emprestada a Juliana.

Juliana tomou emprestada certa quantia a ser paga ao final de 1 ano e 2 meses a uma taxa de juro simples de 2,5% a.m. Sabendo que ao final desse período Juliana pagou R\$ 1822,50, determine a quantia emprestada a Juliana.

*Resposta: Iniciamos retirando os dados do problema:
Como as unidades de tempo e taxa são distintas, convertemos, por exemplo, a unidade de tempo em meses.*

$$t = 1 \cdot 12 + 2 = 14 \text{ meses.}$$

A quantidade que Juliana pagou ao final corresponde ao Montante.

$$M = 1822,50$$

$$t = 14 \text{ meses}$$

$$i = 2,5\% = 0,025 \text{ a.m.}$$

$$C = ?$$

Se,

$$M = C + J$$

$$J = C \cdot i \cdot t$$

Então,

$$M = C + C \cdot i \cdot t$$

$$M = C \cdot (1 + i \cdot t)$$



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Basta substituírmos os valores:

$$1822,50 = C \cdot (1 + 0,025 \cdot 14)$$

$$1822,50 = C \cdot (1,35)$$

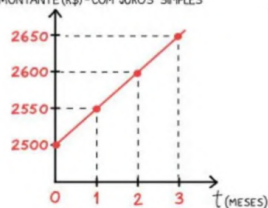
$$C = \frac{1822,50}{1,35} = 1350 \text{ reais.}$$

Em seguida, a professora irá trazer o exemplo de um gráfico de montante em relação ao tempo, traçando um paralelo do montante em Juros Simples com a função de 1º grau e com uma progressão aritmética (PA):

Juros Simples

ANALISANDO OS JUROS SIMPLES

MONTANTE (R\$) - COM JUROS SIMPLES



O gráfico do montante é uma reta, ou seja, o montante corresponde a uma função do 1º grau.

O montante do juro simples aumenta linearmente, de acordo com a progressão aritmética cuja razão é igual ao valor dos juros.

- Observando este gráfico, ele representa o montante em reais, em função do tempo em meses. Percebam que o montante, em regime de capitalização simples, corresponde a uma função do 1º grau (linear). Da mesma maneira, podemos relacionar o montante do juros simples com uma PA.

Caso surgir questionamentos com relação ao termo geral da PA, ela pode ser descrita da seguinte forma:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a_n = 2500 + (n - 1) \cdot 50$$

E a função do 1º grau pode ser descrita da seguinte forma:

$$f(x) = 50x + 2500$$

- Neste caso, qual será o capital inicial?

Resposta esperada: 2500 reais.

- E o Juro mensal?

Resposta esperada: 50 reais, pois é o valor que aumenta a cada mês.

- E qual é a taxa de juros?

Resposta esperada: 2% ao mês.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Para finalizar a teoria desta aula, a professora irá apresentar os tipos de juros simples:

❖ **Juros Simples**

Há 3 tipos de juros simples:

Juro Comercial: todos os meses terão 30 dias, e o ano terá 360 dias.

Juro Exato: os meses seguem a realidade de dias, e o ano terá 365 dias ou 366 dias se for bissexto.

Juro Bancário: os meses seguem a realidade de dias, e o ano possui 360 dias.



- *Notem que se a questão não especificar quantos dias correspondem um mês e um ano, consideramos o conceito do Juro Comercial: 1 mês = 30 dias e 1 ano = 360 dias.*

Sistematização/Fechamento da Aula:

Para exercitar os conceitos explorados na aula, será encaminhada uma lista de exercícios envolvendo Juros Simples. Os alunos poderão se organizar em duplas e/ou trios. A professora irá entregar a lista de exercícios impressa, auxiliando os alunos quando solicitado e acompanhando o seu desenvolvimento. Os alunos que não concluírem a lista em sala deverão terminá-la em casa.

Lista de exercícios - Juros Simples

1. Um investidor aplicou R\$2.620,00, no sistema de juro simples, a uma taxa de 2% a.m., durante 9 meses. Qual foi o montante obtido pelo investidor ao final da aplicação?

Resposta:

$$J = C \cdot i \cdot t$$
$$J = 2620 \cdot 0,02 \cdot 9 = 471,60 \text{ reais de juros}$$

$$M = C + J$$
$$M = 2620 + 471,6 = 3091,60 \text{ reais}$$



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

2. Determine as taxas anuais proporcionais para as taxas abaixo:

a) 15% a.s.

b) 8% a.t.

c) 4% a.m.

Resposta:

a) 1 ano = 2 semestres:

$$15\% \cdot 2 = 30\% \text{ a.a.}$$

b) 1 ano = 4 trimestres:

$$8\% \cdot 4 = 32\% \text{ a.a.}$$

c) 1 ano = 12 meses:

$$4\% \cdot 12 = 48\% \text{ a.a.}$$

3. Calcular a taxa mensal proporcional às taxas abaixo:

a) 60% a.a.

b) 50% a.s.

c) 42% a.t.

Resposta:

a) 1 ano = 12 meses:

$$60\%/12 = 5\% \text{ a.m.}$$

b) 1 semestre = 6 meses:

$$50\%/6 \simeq 8,33\% \text{ a.m.}$$

c) 1 trimestre = 3 meses:

$$42\%/3 = 14\% \text{ a.m.}$$

4. Marcos deseja investir R\$3.400,00 em certa aplicação, cuja taxa de juro simples é de 3% a.m. Por quantos meses o capital deverá ser investido para que Marcos obtenha um rendimento de R\$1.938,00?

Resposta: Com a fórmula do Juros Simples temos

$$\begin{aligned} J &= C \cdot i \cdot t \\ 1938 &= 3400 \cdot 0,03 \cdot t \\ 1938 &= 102t \\ t &= 19 \text{ meses} \end{aligned}$$

5. Qual deve ser a taxa mensal de juro simples em que um capital deve ser aplicado para que, ao final de 3 anos e 4 meses, o montante obtido seja o dobro do capital investido?



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Resposta:

3 anos = 36 meses + 4 meses = 40 meses

Com a fórmula do Montante temos

$$M = C + J = C \cdot (1 + i \cdot t)$$

$$2C = C \cdot (1 + i \cdot 40)$$

$$2C = C + 40 \cdot C \cdot i$$

$$2C - C = 40 \cdot C \cdot i$$

$$C = 40 \cdot C \cdot i$$

$$1 = 40i$$

$$i = 1/40 = 0,025 = 2,5\% \text{ a.m.}$$

6. Em uma loja, certa mercadoria é vendida, à vista, por R\$125,00, podendo também ser paga em uma única parcela, 120 dias após a compra, por R\$145,00. Determine a taxa de juro simples mensal aplicada pela loja.

Resposta:

120 dias = 120/30 = 4 meses

O aumento foi de 20 reais, que corresponde ao Juros acumulado.

Com a fórmula do Juros Simples temos,

$$J = C \cdot i \cdot t$$

$$20 = 125 \cdot i \cdot 4$$

$$20 = 500i$$

$$20/500 = i$$

$$i = 0,04 = 4\% \text{ a.m.}$$

7. Mônica é uma estudante do curso de Estatística em uma universidade e sempre gostou de investir. Porém, antes de fazer certos investimentos, considera todas as condições possíveis, a fim de evitar perder dinheiro no investimento. Certa vez, ela estava interessada em aplicar R\$ 3.000,00 a uma taxa de juros de 5% ao mês e, ao avaliar o potencial de rendimento do capital que tinha, chegou às seguintes conclusões:

I. considerando o regime de capitalização simples, os juros a serem recebidos ao final de 12 meses serão R\$ 1.800,00;

II. considerando o regime de capitalização simples e um prazo de 24 meses, o valor a ser recebido de juros será menos de R\$ 3.000,00.

III. considerando o regime de capitalização simples, esse investimento vai produzir um montante de exatamente R\$ 6.600,00 ao final de 24 meses.

Nesse contexto, está(ão) correta(s) apenas a(s) afirmativa(s)?



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Resposta:

I. $J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow J = 3\,000 \cdot 0,05 \cdot 12 = 1\,800$; verdadeira.

II. $J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow J = 3\,000 \cdot 0,05 \cdot 24 = 3\,600$; falsa.

III. $M = C + J = 3\,000 + 3\,600 = 6\,600$; verdadeira.

Portanto, são verdadeiras as afirmativas I e III.

8. (ESPM-SP) Um capital aplicado a juro simples de 5% a.m. triplica o seu valor em:

- a) 2 anos e meio
- b) 2 anos e 8 meses
- c) 3 anos
- d) 3 anos e 4 meses
- e) 4 anos

Resposta:

Com a fórmula do Montante temos

$$M = C + J = C \cdot (1 + i \cdot t)$$

$$3C = C \cdot (1 + 0,05 \cdot t)$$

$$3C = C + 0,05Ct$$

$$2C = 0,05 \cdot C \cdot t$$

$$\frac{2C}{0,05C} = t = 40 \text{ meses}$$

$$40/12 = 3 \text{ anos e } 4 \text{ meses}$$

9. (ENEM 2018) Um rapaz possui um carro usado e deseja utilizá-lo como parte do pagamento na compra de um carro novo. Ele sabe que, mesmo assim, terá que financiar parte do valor da compra.

Depois de escolher o modelo desejado, o rapaz faz uma pesquisa sobre as condições de compra em três lojas diferentes. Em cada uma, é informado sobre o valor que a loja pagaria por seu carro usado, no caso de a compra ser feita na própria loja. Nas três lojas são cobrados juros simples sobre o valor a ser financiado, e a duração do financiamento é de um ano. O rapaz escolherá a loja em que o total, em real, a ser desembolsado será menor. O quadro resume o resultado da pesquisa.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Loja	Valor oferecido pelo carro usado (R\$)	Valor do carro novo (R\$)	Percentual de juros (%)
A	13.500,00	28.500,00	18 ao ano
B	13.000,00	27.000,00	20 ao ano
C	12.000,00	26.500,00	19 ao ano

A quantia a ser desembolsada pelo rapaz, em real, será?

Resposta:

Primeiro calculamos qual seria o valor financiado, depois os Juros.

$$M = C + J = C \cdot (1 + i \cdot t)$$

A:

$$28500 - 13500 = 15000$$

$$M = 15000 \cdot (1 + 0,18 \cdot 1) = 17700 \text{ reais}$$

B:

$$27000 - 13000 = 14000$$

$$M = 14000 \cdot (1 + 0,2 \cdot 1) = 16800 \text{ reais}$$

C:

$$26500 - 12000 = 14500$$

$$M = 14500 \cdot (1 + 0,19 \cdot 1) = 17255 \text{ reais}$$

Na loja mais barata: R\$ 16.800,00

8. Avaliação

A avaliação da aprendizagem dos alunos será feita mediante aspectos qualitativos, como o empenho e dedicação, e quantitativos, como o registro no caderno e a realização dos exercícios propostos.

9. Bibliografias

ANDRADE, T. M. [org.] **Matemática interligada**: grandezas, sequências e matemática financeira / obra coletiva; editora responsável. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Provas e gabaritos**. Disponível em: <<https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>>.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central - Santa Rosa/RS - CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Base Nacional Comum Curricular: educação é a base. Brasília, 2017.

DANTE, L. R.; VIANA, F. Do seu jeito: Matemática: área de Matemática e suas Tecnologias: volume 3: Ensino Médio. 1. ed. São Paulo: Ática, 2024.

10. Observações

A aula ocorreu após a prova do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), por isso os alunos estavam cansados e distraídos. Não foi possível atender todos os objetivos propostos no plano, pois algumas mudanças ocorreram com relação ao planejamento inicial, considerando o contexto pós-prova e o tempo de aula.

Durante a minha explicação, senti que eles não estavam compreendendo. Analisando posteriormente, percebo que apressei a explicação dos conceitos tentando aproveitar ao máximo o pouco de disposição que ainda lhes restava, pois muitos estavam cansados e distraídos. Tentei chamar a atenção de volta para o quadro com questionamentos, mas sem muito sucesso. Após a aula, também percebi que poderia ter usado da prova do SAEB como gancho para o conteúdo da aula, visto que um dos alunos me contou que havia questões sobre juros na prova.

Realizei a entrega das avaliações ao final da aula. Neste momento alguns alunos conversaram comigo, sanando dúvidas sobre os seus erros. Em um dos casos, o aluno me perguntou o porquê de ter errado a questão mesmo tendo marcado a alternativa correta. Acontece, porém, que a resolução apresentada não condizia com a alternativa marcada, seu resultado apontava para outra alternativa.

9) (UFRGS 2020) Um jogador, ao marcar números em um cartão de aposta, como o representado na figura abaixo, decidiu utilizar apenas seis números primos.

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

A probabilidade de que os seis números sorteados no cartão premiado sejam todos números primos é

☒ A) $\frac{C_{17,6}}{C_{60,6}}$ B) $\frac{1}{C_{60,6}}$ C) $\frac{C_{60,6}}{C_{17,6}}$ D) $\frac{A_{17,6}}{A_{60,6}}$ E) $\frac{A_{60,6}}{A_{17,6}}$

9) $60, 17$ $\frac{60!}{(60-17)!} \rightarrow \frac{60!}{43!} \rightarrow$ probabilidade

Resultados favoráveis = $\frac{17!}{(17-6)!} \rightarrow \frac{17!}{11!}$ ou $A_{17,6}$

possibilidades totais = $\frac{60!}{(60-6)!} \rightarrow \frac{60!}{54!}$ ou $A_{60,6}$

$\frac{A_{17,6}}{A_{60,6}}$

A



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Ele argumentou que “no vestibular a questão estaria certa”. De fato estaria, porém, meu objetivo em sala de aula era avaliar o raciocínio que o aluno seguiu para solucionar o problema, e assim saber se a aprendizagem se efetivou. Ao final, mesmo explicando para o aluno, este não saiu satisfeito.

Um dos alunos incluídos também me disse que, segundo ele, esta foi a prova que ele mais estudou e foi pior. Os seus erros, assim como de outros colegas, se concentraram na parte de interpretação de alguns problemas, o que acarretou uma resolução equivocada. Outro aluno também solicitou que eu corrigisse a questão 2, com maior índice de erro entre a turma (apenas 5 alunos acertaram). Devido ao tempo, combinei de corrigirmos na próxima aula. O aluno incluído com o qual realizei a revisão no contraturno me agradeceu pela aula, pois conseguiu sanar suas dúvidas e ir bem na avaliação (das sete questões, errou apenas uma).

Percebendo que a aula não rendeu como o esperado, considerando que alguns alunos saem mais cedo devido ao transporte e que os minutos finais destinados aos exercícios não estavam sendo bem aproveitados, optei por liberá-los alguns minutos antes para casa.

Maria Vitória Moresco Dalcin

Aluna – Estagiária

Dr. Eduardo Padoin

Supervisor – Parte Concedente

Ma. Marília Boessio Tex de Vasconcellos

Professora Orientadora – Entidade Educacional



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Apêndice A: Material sobre Juros Simples.

JUROS SIMPLES

Quando uma pessoa realiza um empréstimo no banco, por exemplo, ela deve pagar, além da quantia emprestada, um valor a mais, correspondente ao juro, isto é, um tipo de “aluguel” pelo período em que o dinheiro ficou emprestado.

TERMOS DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

- **Capital (C):** quantia em dinheiro no início da aplicação para ser investida ou emprestada.
- **Juro (J):** rendimento, acréscimo ou "aluguel" pago pelo empréstimo de certa quantia.
- **Tempo (t):** período em que certa quantia é investida ou emprestada, podendo ser indicado em dias, meses, bimestres, anos, etc.
- **Taxa de juro (i):** porcentagem que se recebe por uma aplicação ou se paga pelo "aluguel" de um capital por determinado período.
- **Montante (M):** soma do capital com o juro.

A taxa de juros pode ser representada de duas formas:

Taxa Percentual: quando representa os juros de 100 unidades de capital durante o período financeiro a que se refere:
Exemplo: 0,7% a.m.

Taxa Unitária: quando representar os juros de uma unidade de capital durante o período financeiro a que se refere:
Exemplo: 0,007 a.m.

usada para referenciar a taxa de juros

usada para os cálculos

CÁLCULO DO JUROS SIMPLES

Os Juros Simples ocorrem quando a taxa de juros incide sempre apenas sobre o capital inicial. Logo, o valor dos juros é o mesmo do início ao final do período.

$$J = C \cdot i \cdot t$$

$$M = C + J$$

Exemplo 1.

Tainá decidiu aplicar, por 5 meses, R\$ 1.000,00 em uma aplicação à taxa de juros simples de 1% ao mês. Para saber o valor que teria na conta após 5 meses, ela organizou as informações em uma tabela.

Período	Juros (em reais)	Montante (em reais)
Após 1 mês	$0,01 \cdot 1 \cdot 1000 = 10$	$1000 + 10 = 1010$
Após 2 meses	$0,01 \cdot 2 \cdot 1000 = 20$	$1000 + 20 = 1020$
Após 3 meses	$0,01 \cdot 3 \cdot 1000 = 30$	
Após 4 meses		
Após 5 meses		



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Qual é a quantia referente aos juros e ao montante após 3 anos de aplicação?

PERÍODOS DE CAPITALIZAÇÃO

Obs.: A taxa deve ser compatível com a unidade de tempo considerada.

Contagem de tempo:

- ✓ 1 mês = 30 dias;
- ✓ Mensal = 1 mês;
- ✓ Bimestre = 2 meses;
- ✓ Trimestre = 3 meses;
- ✓ Quadrimestre = 4 meses;
- ✓ Semestre = 6 meses;
- ✓ Ano = Regra do banqueiro
(todo ano é bancário, então o ano possui 360 dias corridos).

Períodos de Capitalização:

- *a. a.* – ao ano
- *a. s.* – ao semestre
- *a. q.* – ao quadrimestre
- *a. t.* – ao trimestre
- *a. b.* – ao bimestre
- *a. m.* – ao mês
- *a. d.* – ao dia

CONVERSÃO DE TAXAS

PERÍODO MAIOR → PERÍODO MENOR

Divide-se a taxa pela quantidade de períodos menores equivalentes ao do maior.

Converter 15% ao ano em taxa
semestral.



Se em um ano tem 2 semestres, então
devemos dividir 15 por 2.
Assim 15% a.a = 7,5% a.s.

Converter 15% ao ano em taxa
mensal



Como em um ano tem 12 meses,
temos que dividir 15 por 12.
Assim 15% a.a = 1,25% a.m

PERÍODO MENOR → PERÍODO MAIOR

Multiplica-se a taxa pela quantidade de períodos menores equivalentes ao maior.

Converter 2% ao trimestre em taxa
semestral.



Como em um semestre existem 2
trimestres, então devemos multiplicar
2% por 2.
Assim 2% a.t = 4% a.s.

Converter 2% ao trimestre em taxa
anual.



Como em um ano existem 4 trimestres,
então devemos multiplicar 2% por 4.
Assim 2% a.t = 8% a.a.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

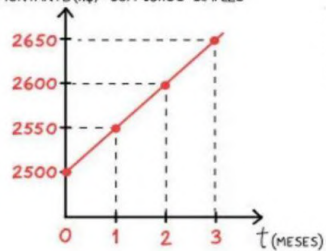
Fone: (55) 2013 0200

Exemplo 2.

Juliana tomou emprestada certa quantia a ser paga ao final de 1 ano e 2 meses a uma taxa de juro simples de 2,5% a.m. Sabendo que ao final desse período Juliana pagou R\$ 1 822,50, determine a quantia emprestada a Juliana.

ANALISANDO OS JUROS SIMPLES

MONTANTE (R\$) - COM JUROS SIMPLES



O gráfico do montante é uma reta, ou seja, o montante corresponde a uma função do 1º grau. O montante do juro simples aumenta linearmente, de acordo com a progressão aritmética cuja razão é igual ao valor dos juros.

Há 3 tipos de juros simples:

Juro Comercial: todos os meses terão 30 dias, e o ano terá 360 dias.

Juro Exato: os meses seguem a realidade de dias, e o ano terá 365 dias ou 366 dias se for bissexto.

Juro Bancário: os meses seguem a realidade de dias, e o ano possui 360 dias.

Se não for especificado, consideramos o conceito COMERCIAL.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Apêndice B: Apresentação de slides sobre Juros Simples.

o estudo da Matemática Financeira

Juros Simples

Juros

Quando uma pessoa realiza um empréstimo no banco, ela deve pagar, além da quantia emprestada, um valor a mais, correspondente ao juro, isto é, um tipo de "aluguel" pelo período em que o dinheiro ficou emprestado.

Outra circunstância envolvendo juro acontece quando uma pessoa faz uma aplicação de certa quantia, seja em caderneta de poupança ou em outro investimento. Nesse caso, a pessoa recebe juro conforme o período em que essa quantia ficou aplicada.

Quando o pagamento de uma fatura é efetuado com atraso, esta é acrescida de juro correspondente ao tempo de atraso.

Isto ocorre pois o valor do dinheiro muda de acordo com o referencial de tempo que utilizamos.



Termos da Matemática Financeira

- **Capital (C):** quantia em dinheiro no início da aplicação para ser investida ou emprestada.
- **Juro (J):** rendimento, acréscimo ou "aluguel" pago pelo empréstimo de certa quantia.
- **Tempo (t):** período em que certa quantia é investida ou emprestada, podendo ser indicado em dias, meses, bimestres, anos, etc.
- **Taxa de juro (i):** porcentagem que se recebe por uma aplicação ou se paga pelo "aluguel" de um capital por determinado período.
- **Montante (M):** soma do capital com o juro.

A taxa de juros pode ser representada de duas formas:

Taxa Percentual: quando representa os juros de 100 unidades de capital durante o período financeiro a que se refere:
Exemplo: 0,7% a.m.

Taxa Unitária: quando representa os juros de uma unidade de capital durante o período financeiro a que se refere:
Exemplo: 0,007 a.m.

usada para referenciar a taxa de juros

usada para os cálculos

Juros Simples

Os **Juros Simples** ocorrem quando a taxa de juros incide sempre apenas sobre o capital inicial. Logo, o valor dos juros é o mesmo do início ao final do período.

$$J = C \cdot i \cdot t$$

$$M = C + J$$

- *J*: juro
- *C*: capital inicial
- *i*: taxa de juros simples (na forma decimal/unitária)
- *t*: período de tempo
- *M*: montante

No mercado financeiro, pouquíssimas são as transações que adotam o regime de juro simples, com exceção de aplicações de curtíssimo prazo.

Juros Simples

Tainá decidiu aplicar, por 5 meses, R\$ 1.000,00 em uma aplicação à taxa de juros simples de 1% ao mês. Para saber o valor que teria na conta após 5 meses, ela organizou as informações em uma tabela.

Período	Juros (em reais)	Montante (em reais)
Após 1 mês	$0,01 \cdot 1 \cdot 1000 = 10$	$1000 + 10 = 1010$
Após 2 meses	$0,01 \cdot 2 \cdot 1000 = 20$	$1000 + 20 = 1020$
Após 3 meses	$0,01 \cdot 3 \cdot 1000 = 30$	
Após 4 meses		
Após 5 meses		

Juros Simples

Tainá decidiu aplicar, por 5 meses, R\$ 1.000,00 em uma aplicação à taxa de juros simples de 1% ao mês. Para saber o valor que teria na conta após 5 meses, ela organizou as informações em uma tabela.

Período	Juros (em reais)	Montante (em reais)
Após 1 mês	$0,01 \cdot 1 \cdot 1000 = 10$	$1000 + 10 = 1010$
Após 2 meses	$0,01 \cdot 2 \cdot 1000 = 20$	$1000 + 20 = 1020$
Após 3 meses	$0,01 \cdot 3 \cdot 1000 = 30$	$1\ 000 + 30 = 1\ 030$
Após 4 meses	$0,01 \cdot 4 \cdot 1\ 000 = 40$	$1\ 000 + 40 = 1\ 040$
Após 5 meses	$0,01 \cdot 5 \cdot 1\ 000 = 50$	$1\ 000 + 50 = 1\ 050$

Juros Simples

Tainá decidiu aplicar, por 5 meses, R\$ 1.000,00 em uma aplicação à taxa de juros simples de 1% ao mês. Para saber o valor que teria na conta após 5 meses, ela organizou as informações em uma tabela.

Qual é a quantia referente aos juros e ao montante após 3 anos de aplicação?



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740
Fone: (55) 2013 0200

❖ Períodos de Capitalização

Obs.: A taxa deve ser compatível com a unidade de tempo considerada.

Contagem de tempo:

- ✓ 1 mês = 30 dias;
- ✓ Mensal = 1 mês;
- ✓ Bimestre = 2 meses;
- ✓ Trimestre = 3 meses;
- ✓ Quadrimestre = 4 meses;
- ✓ Semestre = 6 meses;
- ✓ Ano = Regra do banqueiro
(todo ano é bancário, então o ano possui 360 dias corridos).

Períodos de Capitalização:

- a.a. – ao ano
- a.s. – ao semestre
- a.q. – ao quadrimestre
- a.t. – ao trimestre
- a.b. – ao bimestre
- a.m. – ao mês
- a.d. – ao dia

❖ Conversão de Taxas

PERÍODO MAIOR → PERÍODO MENOR

Divide-se a taxa pela quantidade de períodos menores equivalentes ao do maior.

Converter 15% ao ano em taxa
semestral.

Se em um ano tem 2 semestres, então
devemos dividir 15 por 2.
Assim 15% a.a = 7,5% a.s.

Converter 15% ao ano em taxa
mensal

Como em um ano tem 12 meses,
temos que dividir 15 por 12.
Assim 15% a.a = 1,25% a.m

❖ Conversão de Taxas

PERÍODO MENOR → PERÍODO MAIOR

Multiplica-se a taxa pela quantidade de períodos menores
equivalentes ao maior.

Converter 2% ao trimestre em taxa
semestral.

Como em um semestre existem 2
trimestres, então devemos multiplicar
2% por 2.
Assim 2% a.t = 4% a.s.

Converter 2% ao trimestre em taxa
anual.

Como em um ano existem 4 trimestres,
então devemos multiplicar 2% por 4.
Assim 2% a.t. = 8% a.a.

Em regime de juro
simples, duas taxas
proporcionais são
equivalentes.

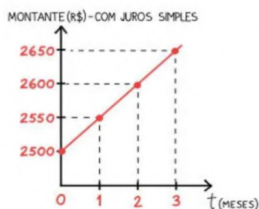
❖ Juros Simples

Exemplo 2:

Juliana tomou emprestada certa quantia a ser paga ao final de 1 ano e 2 meses a uma taxa de juro simples de 2,5% a.m. Sabendo que ao final desse período Juliana pagou R\$ 1 822,50, determine a quantia emprestada a Juliana.

❖ Juros Simples

ANALISANDO OS JUROS SIMPLES



O gráfico do montante é uma reta, ou seja, o montante corresponde a uma função do 1º grau.

O montante do juro simples aumenta linearmente, de acordo com a progressão aritmética cuja razão é igual ao valor dos juros.

❖ Juros Simples

Há 3 tipos de juros simples:

Juro Comercial: todos os meses terão 30 dias, e o ano terá 360 dias.

Juro Exato: os meses seguem a realidade de dias, e o ano terá 365 dias ou 366 dias se for bissexto.

Juro Bancário: os meses seguem a realidade de dias, e o ano possui 360 dias.

Se não for especificado,
consideramos o conceito
COMERCIAL.

Fonte: A Autora (2025).



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Plano de Aula Semanal n° 8

Acadêmico: Maria Vitória Moresco Dalcin

Professora Orientadora: Ma. Marília Boessio Tex de Vasconcellos

Unidade Concedente: Instituto Federal Farroupilha – *Campus* Santa Rosa

Estágio – Turma / N° de alunos: 3° ano Ensino Médio / 35 alunos

Professor Regente da Classe: Eduardo Padoin

N° de Períodos semanal / Tempo de cada período: 3 / 50 minutos

Data/Horário: 07/11/2025 – 3 períodos - 7h30min às 10h

1 .Tema/Assunto:

Matemática Financeira

2. Objetos de Conhecimento:

Juros Compostos

3. Habilidades relativas a BNCC:

(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

4 . Objetivos

- Relacionar o conceito de juros em situações do mundo real, auxiliando na sua compreensão;
- Realizar cálculos com juros compostos, interpretando o contexto de cada problema matemático, para encontrar o dado que se pede (juros, montante, taxa, tempo ou capital);
- Perceber a relação entre o montante nos juros simples e funções exponenciais por meio da representação gráfica;
- Diferenciar as taxas equivalentes no juros simples e nos juros compostos, com o auxílio de quadros comparativos, como parte característica do comportamento de cada regime de juros;
- Desenvolver o raciocínio lógico através de situações-problema propostas, estimulando o uso de diferentes estratégias de resolução;
- Identificar potencialidades e dificuldades acerca dos conceitos explorados ao longo da aula, através da resolução dos exercícios propostos.

5. Metodologia

Método Expositivo e Dialogado.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

6. Recursos

Materiais de uso comum, material impresso, *notebook*, *internet*, *slides*, projetor.

7. Desenvolvimento

Incentivação:

Antes de iniciar a aula, os alunos serão orientados a guardar os celulares na caixa da turma.

No primeiro momento, a professora estagiária irá destinar alguns minutos para correção das questões da prova com o maior índice de erro. Após, irá corrigir de 2 a 3 questões da lista de exercícios da aula anterior. As questões selecionadas serão aquelas com maior dúvida entre a turma.

Para dar início aos conceitos da aula, a professora irá distribuir o material impresso (Apêndice A) em que estão sistematizados os conceitos da aula, para que os alunos possam acompanhar e completar com os exemplos desenvolvidos. Então, apresentará uma seleção de *slides* (Apêndice B) que irão guiar o estudo dos Juros Compostos.

📄 matemática financeira: juros compostos

📋 material dos alunos - juros compostos

Desenvolvimento da Aula:

Parte I: Juros Compostos

- *Na aula passada nós conhecemos os Juros Simples. A principal diferença entre os Juros Simples e Composto é sobre a taxa de juros. No Juros Simples, a taxa é calculada em cima do Capital Inicial, ou seja, se mantém constante durante todo o período. No Juros Composto, a taxa é calculada em cima do Montante, ou seja, ela varia conforme o tempo passa. Vamos observar este primeiro exemplo comparativo:*



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740
Fone: (55) 2013 0200

❖ *Juros Simples x Juros Compostos*

Você aplicou R\$1.000,00 a uma taxa de 30% ao mês. Qual será o montante ao final de 4 meses?

Mês	Juros Simples		Juros Compostos	
	Rendimento	Montante	Rendimento	Montante
1	$R\$ 1.000 \times 0,3 = R\$ 300$	R\$ 1.300		
2	$R\$ 1.000 \times 0,3 = R\$ 300$	R\$ 1.600		
3	$R\$ 1.000 \times 0,3 = R\$ 300$	R\$ 1.900		
4	$R\$ 1.000 \times 0,3 = R\$ 300$	R\$ 2.200		

Você aplicou R\$1.000,00 a uma taxa de 30% ao mês. Qual será o montante ao final de 4 meses?

Resposta: Iniciamos completando a tabela:

Rendimento/Juros ($C \cdot i$)	Montante ($C+J$)
$1000 \cdot 0,3 = R\$ 300$	$1000 + 300 = R\$ 1300$
$1300 \cdot 0,3 = R\$ 390$	$1300 + 390 = R\$ 1690$
$1690 \cdot 0,3 = R\$ 507$	$1690 + 507 = R\$ 2197$
$2197 \cdot 0,3 = R\$ 659,10$	$2197 + 659,10 = R\$ 2856,10$

Podemos representar estas operações da seguinte forma:

No primeiro mês:

$$M_1 = C + J_1$$

$$M_1 = C + C \cdot i = C(1 + i)$$

$$M_1 = C(1 + i)$$

No segundo mês:

$$M_2 = M_1 + M_1 \cdot i = C(1 + i) + C(1 + i) \cdot i$$

colocando $C(1 + i)$ em evidência

$$M_2 = C(1 + i) \cdot (1 + i)$$

$$M_2 = C(1 + i)^2$$

No terceiro mês:



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

$$M_3 = M_2 + M_2 * i = C(1 + i)^2 + C(1 + i)^2 * i$$

colocando $C(1 + i)^2$ em evidência

$$M_3 = C(1 + i)^2 * (1 + i)$$

$$M_3 = C(1 + i)^3$$

No quarto mês:

$$M_4 = M_3 + M_3 * i = C(1 + i)^3 + C(1 + i)^3 * i$$

colocando $C(1 + i)^3$ em evidência

$$M_4 = C(1 + i)^3 * (1 + i)$$

$$M_4 = C(1 + i)^4$$

- Percebamos que o expoente é igual ao número de meses, portanto esse expoente representa o tempo. Com isso obtemos a fórmula para o Juro Composto: $M = C(1 + i)^t$. Neste caso, o Juros será calculado por: $J = M - C$.

Juros Simples x Juros Compostos

Você aplicou R\$1.000,00 a uma taxa de 30% ao mês. Qual será o montante ao final de 4 meses?

Mês	Juros Simples		Juros Compostos	
	Rendimento	Montante	Rendimento	Montante
1	R\$ 1.000 x 0,3 = R\$ 300	R\$ 1.300	R\$ 1.000 x 0,3 = R\$ 300	R\$ 1.300
2	R\$ 1.000 x 0,3 = R\$ 300	R\$ 1.600	R\$ 1.300 x 0,3 = R\$ 390	R\$ 1.690
3	R\$ 1.000 x 0,3 = R\$ 300	R\$ 1.900	R\$ 1.690 x 0,3 = R\$ 507	R\$ 2.197
4	R\$ 1.000 x 0,3 = R\$ 300	R\$ 2.200	R\$ 2.197 x 0,3 = R\$ 659,10	R\$ 2.856,10



- Com a tabela conseguimos comparar como os dois regimes de juros se comportam no mesmo contexto. No primeiro mês, ambos os regimes nos retornam o mesmo Montante, porém, a partir do segundo o Juro Composto nos dá um retorno maior. Isso acontece pois seu juros é calculado em cima do montante anterior, ou seja, juros sobre juros.

Para melhor visualização desta diferença em relação ao tempo, a professora irá apresentar o seguinte gráfico:

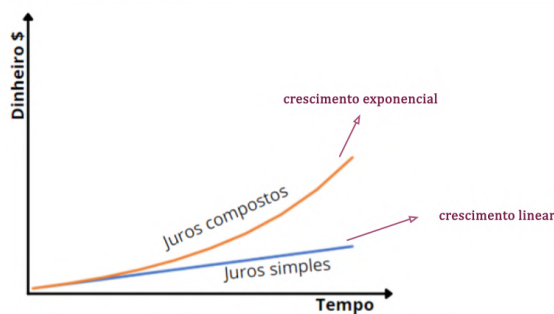


MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740
Fone: (55) 2013 0200

❖ Juros Simples x Juros Compostos



Então, será realizada a formalização dos Juros Compostos através de *slides*.

❖ Juros Compostos

Os **Juros Compostos** ocorrem quando a taxa de juros incide sobre o montante do período anterior. Logo, "juros sobre juros".

$$M = C \cdot (1+i)^t$$

$$J = M - C$$

- J: juro
- C: capital inicial
- i: taxa de juros (na forma decimal/unitária)
- t (ou n): período de tempo
- M: montante

Após, a professora irá explicar que existem basicamente 4 cálculos clássicos envolvendo Juros Compostos: do montante, do capital, da taxa e do período.

- *Observem o primeiro exemplo:*

❖ Juros Compostos

Quanto receberá de juros, no fim de 1 semestre, uma pessoa que investiu a quantia de R\$ 6.000,00 à taxa de juros compostos de 1% ao mês?





MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Quanto receberá de juros, no fim de 1 semestre, uma pessoa que investiu a quantia de R\$ 6.000,00 à taxa de juros compostos de 1% ao mês?

Resposta: Iniciamos retirando as informações do problema.

$C = 6\,000$

$M = ?$

$i = 1\% \text{ a.m.} = 0,01 \text{ a.m.}$

$t = 1 \text{ semestre} = 6 \text{ meses}$

$J = ?$

Analisamos as fórmulas que temos disponíveis:

$$M = C(1 + i)^t$$

$$J = M - C$$

Para calcularmos o Juros, precisamos do Montante e do Capital. Já temos o Capital, portanto calculamos primeiramente o Montante:

$$M = 6\,000(1 + 0,01)^6$$

$$M = 6\,000(1,01)^6$$

$$M = 6\,000 \cdot 1,06152 = 6369,12 \text{ reais}$$

- Para um resultado mais preciso, vocês podem colocar toda a expressão diretamente na calculadora, contando, assim, todas as casas decimais.

O Juros será a diferença entre o Montante (total acumulado até o final do período) e o Capital inicial:

$$J = M - C$$

$$J = 6369,12 - 6000 = 369,12 \text{ reais}$$

❖ Juros Compostos

Rafael aplicou determinado capital em um investimento a uma taxa mensal de juros compostos de 2,4%. Após 2 anos de investimento ele resgatou o montante desta aplicação, recebendo R\$ 6200,00. Qual foi o capital investido?





MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Rafael aplicou determinado capital em um investimento a uma taxa mensal de juros compostos de 2,4%. Após 2 anos de investimento ele resgatou o montante desta aplicação, recebendo R\$ 6200,00. Qual foi o capital investido?

Resposta: Iniciamos retirando as informações do problema.

$C = ?$

$M = 6\,200$

$i = 2,4\% \text{ a.m.} = 0,024 \text{ a.m.}$

$t = 2 \text{ anos} = 24 \text{ meses}$

Analisamos as fórmulas que temos disponíveis:

$$M = C(1 + i)^t$$

$$J = M - C$$

Para calcular o Capital, considerando as informações recebidas, utilizamos a fórmula do Montante:

$$M = C(1 + i)^t$$

$$6200 = C(1 + 0,024)^{24}$$

$$6200 = C(1,024)^{24}$$

$$\frac{6200}{(1,024)^{24}} = C = 3509,07 \text{ reais}$$

❖ **Juros Compostos**

Você recebe uma proposta para investir hoje a importância de R\$ 300.000,00 para receber R\$ 440.798,42 ao fim de 5 meses. Qual a taxa de rentabilidade mensal, em regime de juros sobre juros, desse investimento?



Você recebe uma proposta para investir hoje a importância de R\$ 300.000,00 para receber R\$ 440.798,42 ao fim de 5 meses. Qual a taxa de rentabilidade mensal, em regime de juros sobre juros, desse investimento?

Resposta: Iniciamos retirando as informações do problema.

$C = 300\,000$



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central - Santa Rosa/RS - CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

$$M = 440\,798,42$$

$$i = ? \% \text{ a.m.}$$

$$t = 5 \text{ meses}$$

Analizamos as fórmulas que temos disponíveis:

$$M = C(1 + i)^t$$

$$J = M - C$$

Para calcular a Taxa (que será mensal, neste caso), considerando as informações recebidas, utilizamos a fórmula do Montante:

$$440798,42 = 300000(1 + i)^5$$

$$\frac{440798,42}{300000} = (1 + i)^5$$

$$\sqrt[5]{\frac{440798,42}{300000}} = \sqrt[5]{(1 + i)^5}$$

$$\sqrt[5]{\frac{440798,42}{300000}} = 1 + i$$

$$\sqrt[5]{\frac{440798,42}{300000}} - 1 = i$$

Calculando diretamente na calculadora temos:

$$i = 0,079 \simeq 8\% \text{ a.m.}$$

Juros Compostos

Determinar o prazo de uma aplicação de R\$ 50.000,00, no regime de capitalização composta, à taxa de 7% ao mês, cujo resgate foi de R\$ 65.539,80.

$$\log_a b^n \leftrightarrow n \cdot \log_a b$$



Determinar o prazo de uma aplicação de R\$ 50.000,00, no regime de capitalização composta, à taxa de 7% ao mês, cujo resgate foi de R\$ 65.539,80.

Resposta: Iniciamos retirando as informações do problema.

$$C = 50\,000$$

$$M = 65\,539,80$$



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

$i = 7\% \text{ a.m.} = 0,07 \text{ a.m.}$

$t = ? \text{ meses}$

Analizamos as fórmulas que temos disponíveis:

$$M = C(1 + i)^t$$
$$J = M - C$$

Para calcular o prazo (que será em meses, neste caso), considerando as informações recebidas, utilizamos a fórmula do Montante:

$$65539,8 = 50000(1 + 0,07)^t$$
$$\frac{65539,8}{50000} = (1,07)^t$$
$$1,310796 = (1,07)^t$$

- Como a nossa incógnita está no expoente, para descobrir o valor de t precisamos utilizar de uma das propriedades do logaritmo.

$$\log(1,310796) = \log((1,07)^t)$$

$$\log_a b^n \leftrightarrow n \cdot \log_a b$$

$$\log(1,310796) = t \cdot \log(1,07)$$
$$\frac{\log(1,310796)}{\log(1,07)} = t$$
$$t = 3,99 \simeq 4 \text{ meses}$$

Parte II: Taxas Proporcionais e Equivalentes

- Ao longo dos exemplos, nós convertemos o período para se adequar a unidade de tempo da taxa. Mas e se precisarmos adequar a taxa? Diferentemente dos Juros Simples, nos Juros Compostos as taxas proporcionais não são equivalentes, ou seja, não produzem os mesmos juros sobre as mesmas condições.

Para mostrar esta a diferença, a professora irá apresentar uma comparação da conversão de taxas em juros simples e, após, de juros compostos. Todos sobre as mesmas condições de Capital inicial e tempo:



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740
Fone: (55) 2013 0200

❖ Taxas Proporcionais e Taxas Equivalentes

Em regime de **juros simples**, duas taxas proporcionais **são** equivalentes.

taxa de juros mensal	taxa de juros anuais
• $C = 200$ • $t = 12$ meses • $i = 1\% \text{ a.m.} = 0,01 \text{ a.m.}$ $M = C(1 + i \cdot t)$ $M = 200(1 + 0,01 \cdot 12)$ $M = 200(1 + 0,12)$ $M = 200(1,12)$ $M = 224 \text{ reais}$	• $C = 200$ • $t = 1$ ano • $i = 12\% \text{ a.m.} = 0,12 \text{ a.m.}$ $M = C(1 + i \cdot t)$ $M = 200(1 + 0,12 \cdot 1)$ $M = 200(1 + 0,12)$ $M = 200(1,12)$ $M = 224 \text{ reais}$

- Neste caso, as taxas de 1% ao mês e 12% ao ano são proporcionais e equivalentes.

❖ Taxas Proporcionais e Taxas Equivalentes

Em regime de **juros compostos**, duas taxas proporcionais **não** são equivalentes.

taxa de juros mensal	taxa de juros anuais
• $C = 200$ • $t = 12$ meses • $i = 1\% \text{ a.m.} = 0,01 \text{ a.m.}$ $M = C(1 + i)^t$ $M = 200(1 + 0,01)^{12}$ $M = 200(1,01)^{12}$ $M = 225,36 \text{ reais}$	• $C = 200$ • $t = 1$ ano • $i = 12\% \text{ a.m.} = 0,12 \text{ a.m.}$ $M = C(1 + i)^t$ $M = 200(1 + 0,12)^1$ $M = 200(1,12)^1$ $M = 224 \text{ reais}$

- Neste caso, o resultado de duas taxas proporcionais não geram montantes equivalentes.

- Vejamos os exemplos a seguir:

❖ Cálculo da Taxa Equivalente

PERÍODO MAIOR → PERÍODO MENOR

Uma taxa de 50% a.s. equivale a quanto % ao mês?





MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Uma taxa de 50% a.s. equivale a quanto % ao mês?

Resposta: As taxas equivalentes irão produzir o mesmo Montante ao final do período sobre um mesmo capital inicial. Olhando para a fórmula dos Juros Compostos temos:

$$M = C(1 + i)^t$$

O nosso Montante e o nosso Capital permanecerão os mesmos, então a parte que deve ser ajustada é o $(1 + i)^t$. Podemos calcular a taxa equivalente seguindo os passos:

- I. Iguale o que você quer com o que você tem.
- II. Igualando os fatores das taxas $(1 + i)$.
- III. Igualando as relações exponenciais.

Nós temos uma taxa semestral de 50%. Sabemos que 1 semestre possui 6 meses.

I. 50% a.s. → ?% a.m.

II. 1 semestre = 6 meses

III. $(1 + 0,5)^1 = (1 + i)^6$
semestre mês

$$\sqrt[6]{(1,5)} = \sqrt[6]{(1 + i)^6}$$

$$\sqrt[6]{(1,5)} = 1 + i$$

$$\sqrt[6]{(1,5)} - 1 = i$$

$$i \simeq 0,069 \simeq \mathbf{6,9\% \text{ a.m.}}$$

❖ *Cálculo da Taxa Equivalente*

PERÍODO MENOR → PERÍODO MAIOR
Qual é a taxa anual equivalente a 2% ao mês?

Qual é a taxa anual equivalente a 2% ao mês?



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Resposta: Nós temos uma taxa mensal de 2% ao mês, e precisamos encontrar a sua equivalente anual. Sabemos que 1 ano possui 12 meses, então montaremos a expressão da seguinte forma:

I. 2% a.m. → ?% a.a.

II. 12 meses = 1 ano

III. $(1 + 0,02)^{12} = (1 + i)^1$
mês ano

$$(1,02)^{12} = 1 + i$$

$$(1,02)^{12} - 1 = i$$

$$i \simeq 0,268 \simeq \mathbf{26,8\% \text{ a.a.}}$$

Sistematização/Fechamento da Aula:

Para exercitar os conceitos explorados na aula, será encaminhada uma lista de exercícios envolvendo Juros Compostos. Os alunos poderão se organizar em duplas e/ou trios. A professora irá entregar a lista de exercícios impressa, auxiliando os alunos quando solicitado e acompanhando o seu desenvolvimento. Os alunos que não concluírem a lista em sala deverão terminá-la em casa.

Neste momento também será realizada a chamada para registrar a presença dos alunos.

Como finalização do período de estágio, a professora irá conversar com os alunos sobre as aulas desenvolvidas, lembrando-os de que este é o último dia das práticas pedagógicas. A partir disso, será proposto um questionário (Apêndice C) de *feedback* por meio do *Google Forms* que os alunos poderão acessar por meio do link ou QR Code que serão projetados em *slides*.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200



Feedback
das aulas



<https://forms.gle/ybJnGA4nWSk9chJJ7>

Link de acesso ao questionário: <https://forms.gle/ybJnGA4nWSk9chJJ7>

Lista de exercícios - Juros Compostos

1. Determine, no regime de juros compostos:

- a) a taxa mensal equivalente a 48% a.t.
b) taxa semestral equivalente a 8% ao trimestre.

Resposta:

a) I. 48% a.t. → ?% a.m.

II. 1 trimestre = 3 meses

III. $(1 + 0,48)^1 = (1 + i)^3$
trimestre mês

$$\sqrt[3]{(1,48)} = \sqrt[3]{(1 + i)^3}$$

$$\sqrt[3]{(1,48)} = 1 + i$$

$$\sqrt[3]{(1,48)} - 1 = i$$

$$i \simeq 0,139 \simeq \mathbf{13,9\% \text{ a.m.}}$$

b) I. 8% a.t. → ?% a.s.

II. 2 trimestres = 1 semestre

III. $(1 + 0,08)^2 = (1 + i)^1$
trimestre semestre

$$(1,08)^2 = 1 + i$$

$$(1,08)^2 - 1 = i$$

$$i \simeq 0,1664 \simeq \mathbf{16,64\% \text{ a.s.}}$$

2. (Unesp - SP) Um capital de R\$ 1.000,00 é aplicado durante 4 meses.

- a) Determine o rendimento da aplicação no período, considerando a taxa de juro simples de 10% a.m.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

b) Determine o rendimento da aplicação no período, considerando a taxa de juro composto de 10% a.m.

Resposta:

C = 1000 reais

i = 10% a.m. = 0,1 a.m.

t = 4 meses

a) $J = C \cdot i \cdot t$

$$J = 1000 \cdot 0,1 \cdot 4 = 400 \text{ reais}$$

b) $M = C(1 + i)^t$

$$M = 1000(1 + 0,1)^4 = 1464,1$$

$$J = M - C$$

$$J = 1464,1 - 1000 = 464,10 \text{ reais}$$

3. Um investidor aplica R\$ 4.000,00 a certa taxa de juro composto. Após 4 meses, o juro obtido na aplicação é de R\$ 330,00. Determine a taxa mensal da aplicação.

Resposta:

C = 4000 reais

J = 330

t = 4 meses

Iniciamos calculando o valor do Montante:

$$J = M - C$$

$$330 = M - 4000$$

$$M = 4330 \text{ reais}$$

Então, calculamos a taxa mensal:

$$4330 = 4000(1 + i)^4$$

$$\sqrt[4]{\frac{4330}{4000}} = \sqrt[4]{(1 + i)^4}$$

$$\sqrt[4]{\frac{4330}{4000}} = (1 + i)$$

$$i = \sqrt[4]{\frac{4330}{4000}} - 1 \simeq 0,02 \simeq 2\% \text{ a.m.}$$

4. Um capital de R\$ 900,00 foi aplicado a juros compostos à taxa de 18% a.a. durante 2 anos. Quanto rendeu de juros:

a) em porcentagem?

b) em reais?



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Resposta:

C = 900 reais

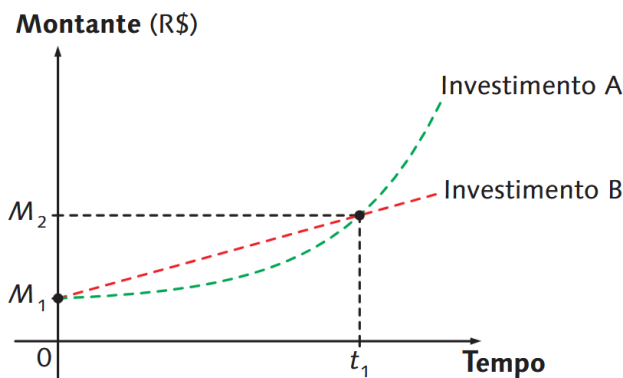
i = 18% a.a. = 0,18 a.a.

t = 2 anos

*a) $(1 + i)^t$
 $(1 + 0,18)^2 = 1,3924 = 39,24\%$ de juros*

b) $0,3924 \cdot 900 = 353,16$ reais

5. Veja no gráfico dois tipos de investimentos oferecidos por um banco.



- a) Sabendo que um desses investimentos utiliza taxa de juro simples e outro de juro composto, identifique cada um deles.
- b) Qual dos investimentos é mais vantajoso para um período menor do que t_1 ?
E maior do que t_1 ?
- c) No início do investimento, qual foi o capital aplicado?

Resposta:

a) Investimento A: juro composto; Investimento B: juro simples.

b) Investimento B é mais vantajoso para um período menor que t_1 ;

Investimento A é mais vantajoso para um período maior que t_1 .

c) Analisando o gráfico, no tempo zero o capital era M_1 .

6. (Enem) João deseja comprar um carro cujo preço à vista, com todos os descontos possíveis, é de R\$ 21.000,00, e esse valor não será reajustado nos próximos meses. Ele tem R\$ 20.000,00, que podem ser aplicados a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, e escolhe deixar todo o seu dinheiro aplicado até que o montante atinja o valor do carro. Para ter o carro, João deverá esperar:

- a) dois meses, e terá a quantia exata.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

- b) três meses, e terá a quantia exata.
- c) três meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R\$ 225,00.
- d) quatro meses, e terá a quantia exata.
- e) quatro meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R\$ 430,00.

Resposta:

M = 21 000 reais

C = 20 000 reais

i = 2% a.m. = 0,02 a.m.

t = ? meses

$$M = C(1 + i)^t$$

$$21\,000 = 20\,000(1 + 0,02)^t$$

$$21\,000 = 20\,000(1 + 0,02)^t$$

$$\frac{21\,000}{20\,000} = (1,02)^t$$

$$1,05 = (1,02)^t$$

Usando a propriedade dos logaritmos:

$$\log(1,05) = \log((1,02)^t)$$

$$\log_a b^n \leftrightarrow n \cdot \log_a b$$

$$\log(1,05) = t \cdot \log(1,02)$$

$$\frac{\log(1,05)}{\log(1,02)} = t$$

$$t \simeq 2,46 \text{ meses}$$

Em 3 meses:

$$M = 20\,000(1 + 0,02)^3 = 21\,224,16 \text{ reais}$$

LETRA C

7. (ENEM 2021 Reaplicação) Um casal decidiu aplicar em um fundo de investimentos que tem uma taxa de rendimento de 0,8% ao mês, num regime de capitalização composta. O valor final F a ser resgatado, depois de n meses, a uma taxa de rendimento mensal x , é dado pela expressão algébrica $F = C(1 + x)^n$, em que C representa o capital inicial aplicado. O casal planeja manter a aplicação pelo tempo necessário para que o capital inicial de R\$100.000,00 duplique, sem outros depósitos ou retiradas.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Fazendo uso da tabela, o casal pode determinar esse número de meses.

Y	Log Y
1,008	0,003
1,08	0,03
1,8	0,20
2	0,30
3	0,47

Para atender ao seu planejamento, o número de meses determinado pelo casal é

- a) 156.
- b) 125.
- c) 100.
- d) 10.
- e) 1,5.

Resposta:

$$M = 2 \cdot 100\,000 = 200\,000 \text{ reais}$$

$$C = 100\,000 \text{ reais}$$

$$x = 0,8\% \text{ a.m.} = 0,008 \text{ a.m.}$$

$$n = ? \text{ meses}$$

$$F = C(1 + x)^n$$

$$200\,000 = 100\,000(1 + 0,008)^n$$

$$2 = (1 + 0,008)^n$$

Usando a propriedade dos logaritmos:

$$\log(2) = \log((1,008)^t)$$

$$\log_a b^n \leftrightarrow n \cdot \log_a b$$

$$\log(2) = t \cdot \log(1,008)$$

$$0,3 = t \cdot 0,003$$

$$\frac{0,3}{0,003} = t$$

$$t = 100 \text{ meses} \quad \textbf{LETRA C}$$

8. Avaliação



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

A avaliação da aprendizagem dos alunos será feita mediante aspectos qualitativos, como a participação nas propostas da aula, dedicação e colaboração com os colegas, e quantitativos, como o registro no caderno e a realização dos exercícios propostos.

9. Bibliografias

ANDRADE, T. M. [org.] **Matemática interligada**: grandezas, sequências e matemática financeira / obra coletiva; editora responsável. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Provas e gabaritos**. Disponível em: <<https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>>.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, 2017.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Do seu jeito: Matemática**: área de Matemática e suas Tecnologias: volume 3: Ensino Médio. 1. ed. São Paulo: Ática, 2024.

10. Observações

No início da aula o professor regente encaminhou algumas orientações para as próximas aulas, visto que este era o meu último dia de estágio e a programação da turma seguia com prova e apresentação de trabalhos.

A aula foi marcada por algumas interrupções e recados acerca da viagem técnica que a turma fará na segunda-feira, e também por entregas de presentes para uma aluna que estava de aniversário. Por isso, alguns alunos estavam mais distraídos e precisei chamar a atenção de volta à aula com frequência.

Mesmo assim, os alunos estavam dispostos e participativos. Me acompanharam nos cálculos com a calculadora, como havia solicitado, pois é importante que eles saibam montar os cálculos na calculadora. E também trouxeram dúvidas interessantes:

No primeiro exemplo, em que é preciso calcular os juros acumulados naquele período, desenvolvemos o cálculo da seguinte forma para descobrir o montante: $M = 6\,000(1,01)^6$. Um dos alunos perguntou, então, se não bastava calcular $(1,01)^6$ para descobrir os juros. Antes de responder, pedi para que ele realizasse o cálculo na calculadora para ver se fechava o resultado, para que



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

ele percebesse por conta própria o seu erro e não precisasse apenas “acreditar em mim”. Percebendo que o resultado não era o mesmo, seu colega explica que é necessário multiplicar por 6 000 pois o juro é calculado em cima do capital inicial. Fiquei feliz neste momento, pois consegui partir de uma dúvida e mediar para que eles investigassem e chegassem a uma conclusão.

Ao tratarmos do cálculo do período com logaritmo também surgiram questões acerca do ENEM, afinal, como eles resolveriam tal questão sem a calculadora? Expliquei que há duas possibilidades: ou a questão tratará das propriedades dos logaritmos, ou dará os valores necessários para fazer a substituição dos termos. Ainda mostrei que na lista de exercícios havia uma questão do ENEM que trabalha justamente desta forma, e com isso muitos optaram por realizá-la primeiro. Questionamentos desse tipo se tornaram mais frequentes visto que a preocupação dos alunos se concentra na prova que se aproxima.

Por fim, liberei o acesso ao celular para que os alunos pudessem responder o questionário de *feedback*, e encerramos a aula com o lanche coletivo, algumas palavras vinda dos alunos e cantamos parabéns para a aniversariante do dia. Um momento de felicidade e despedida.





MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740
Fone: (55) 2013 0200

Maria Vitória Moresco Dalcin
Aluna – Estagiária

Dr. Eduardo Padoin
Supervisor – Parte Concedente

Ma. Marília Boessio Tex de Vasconcellos
Professora Orientadora – Entidade Educacional



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Apêndice A: Material sobre Juros Compostos.

JUROS COMPOSTOS

Exemplo 1.

Você aplicou R\$1.000,00 a uma taxa de 30% ao mês. Qual será o montante ao final de 4 meses?

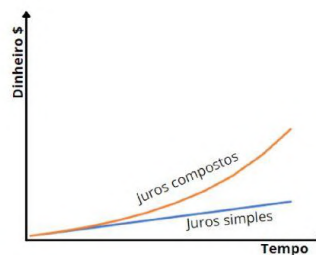
Mês	Juros Simples		Juros Compostos	
	Rendimento	Montante	Rendimento	Montante
1	R\$ 1.000 x 0,3 = R\$ 300	R\$ 1.300		
2	R\$ 1.000 x 0,3 = R\$ 300	R\$ 1.600		
3	R\$ 1.000 x 0,3 = R\$ 300	R\$ 1.900		
4	R\$ 1.000 x 0,3 = R\$ 300	R\$ 2.200		

CÁLCULO DOS JUROS COMPOSTOS

Os Juros Compostos ocorrem quando a taxa de juros incide sobre o montante do período anterior. Logo, “juros sobre juros”.

$$M = C \cdot (1 + i)^t$$

$$J = M - C$$



*Exemplo 2. Cálculo do **Montante***

Quanto receberá de juros, no fim de 1 semestre, uma pessoa que investiu a quantia de R\$ 6.000,00 à taxa de juros compostos de 1% ao mês?

*Exemplo 3. Cálculo do **Capital***

Rafael aplicou determinado capital em um investimento a uma taxa mensal de juros compostos de 2,4%. Após 2 anos de investimento ele resgatou o montante desta aplicação, recebendo R\$ 6200,00. Qual foi o capital investido?



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Exemplo 4. Cálculo da Taxa

Você recebe uma proposta para investir hoje a importância de R\$ 300.000,00 para receber R\$ 440.798,42 ao fim de 5 meses. Qual a taxa de rentabilidade mensal, em regime de juros sobre juros, desse investimento?

Exemplo 5. Cálculo do Período

$$\log_a b^n \leftrightarrow n \cdot \log_a b$$

Determinar o prazo de uma aplicação de R\$ 50.000,00, no regime de capitalização composta, à taxa de 7% ao mês, cujo resgate foi de R\$ 65.539,80.

CÁLCULO DA TAXA EQUIVALENTE NOS JUROS COMPOSTOS

Em regime de juros compostos, duas taxas proporcionais não são equivalentes.

PERÍODO MAIOR → PERÍODO MENOR

Uma taxa de 50% *a.s.* equivale a quanto % ao mês?

PERÍODO MENOR → PERÍODO MAIOR

Qual é a taxa anual equivalente a 2% ao mês?



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Apêndice B: Apresentação de slides sobre Juros Compostos.



Juros Simples x Juros Compostos

o estudo da

Matemática Financeira

Juros Compostos

Você aplicou R\$1.000,00 a uma taxa de 30% ao mês. Qual será o montante ao final de 4 meses?

Mês	Juros Simples		Juros Compostos	
	Rendimento	Montante	Rendimento	Montante
1	R\$ 1.000 x 0,3 = R\$ 300	R\$ 1.300		
2	R\$ 1.000 x 0,3 = R\$ 300	R\$ 1.600		
3	R\$ 1.000 x 0,3 = R\$ 300	R\$ 1.900		
4	R\$ 1.000 x 0,3 = R\$ 300	R\$ 2.200		

Juros Simples x Juros Compostos

Você aplicou R\$1.000,00 a uma taxa de 30% ao mês. Qual será o montante ao final de 4 meses?

Mês	Juros Simples		Juros Compostos	
	Rendimento	Montante	Rendimento	Montante
1	R\$ 1.000 x 0,3 = R\$ 300	R\$ 1.300	R\$ 1.000 x 0,3 = R\$ 300	R\$ 1.300
2	R\$ 1.000 x 0,3 = R\$ 300	R\$ 1.600	R\$ 1.300 x 0,3 = R\$ 390	R\$ 1.690
3	R\$ 1.000 x 0,3 = R\$ 300	R\$ 1.900	R\$ 1.690 x 0,3 = R\$ 507	R\$ 2.197
4	R\$ 1.000 x 0,3 = R\$ 300	R\$ 2.200	R\$ 2.197 x 0,3 = R\$ 659,10	R\$ 2856,10



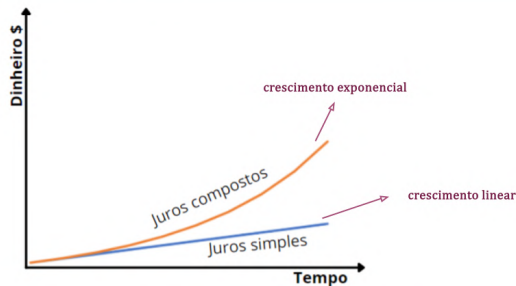
Os **Juros Compostos** ocorrem quando a taxa de juros incide sobre o montante do período anterior. Logo, "juros sobre juros".

$$M = C \cdot (1+i)^t$$

$$J = M - C$$

- J: juro
- C: capital inicial
- i: taxa de juros (na forma decimal/unitária)
- t (ou n): período de tempo
- M: montante

Juros Simples x Juros Compostos



Quanto receberá de juros, no fim de 1 semestre, uma pessoa que investiu a quantia de R\$ 6.000,00 à taxa de juros compostos de 1% ao mês?

cálculo do Montante

Juros Compostos

Rafael aplicou determinado capital em um investimento a uma taxa mensal de juros compostos de 2,4%. Após 2 anos de investimento ele resgatou o montante desta aplicação, recebendo R\$ 6200,00. Qual foi o capital investido?

Juros Compostos

Você recebe uma proposta para investir hoje a importância de R\$ 300.000,00 para receber R\$ 440.798,42 ao fim de 5 meses. Qual a taxa de rentabilidade mensal, em regime de juros sobre juros, desse investimento?

cálculo do Capital

cálculo da Taxa



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA
Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740
Fone: (55) 2013 0200

❖ **Juros Compostos**

Determinar o prazo de uma aplicação de R\$ 50.000,00, no regime de capitalização composta, à taxa de 7% ao mês, cujo resgate foi de R\$ 65.539,80.

$$\log_a b^n \leftrightarrow n \cdot \log_a b$$



❖ **Taxas Proporcionais e Taxas Equivalentes**

Em regime de **juros simples**, duas taxas proporcionais **são** equivalentes.

taxa de juros mensal	taxa de juros anuais
• $C = 200$ • $t = 12 \text{ meses}$ • $i = 1\% \text{ a.m.} = 0,01 \text{ a.m.}$ $M = C(1 + i \cdot t)$ $M = 200(1 + 0,01 \cdot 12)$ $M = 200(1 + 0,12)$ $M = 200(1,12)$ $M = 224 \text{ reais}$	• $C = 200$ • $t = 1 \text{ ano}$ • $i = 12\% \text{ a.m.} = 0,12 \text{ a.m.}$ $M = C(1 + i \cdot t)$ $M = 200(1 + 0,12 \cdot 1)$ $M = 200(1 + 0,12)$ $M = 200(1,12)$ $M = 224 \text{ reais}$

❖ **Taxas Proporcionais e Taxas Equivalentes**

Em regime de **juros compostos**, duas taxas proporcionais **não são** equivalentes.

taxa de juros mensal	taxa de juros anuais
• $C = 200$ • $t = 12 \text{ meses}$ • $i = 1\% \text{ a.m.} = 0,01 \text{ a.m.}$ $M = C(1 + i)^t$ $M = 200(1 + 0,01)^{12}$ $M = 200(1,01)^{12}$ $M = 225,36 \text{ reais}$	• $C = 200$ • $t = 1 \text{ ano}$ • $i = 12\% \text{ a.m.} = 0,12 \text{ a.m.}$ $M = C(1 + i)^t$ $M = 200(1 + 0,12)^1$ $M = 200(1,12)^1$ $M = 224 \text{ reais}$

❖ **Cálculo da Taxa Equivalente**

PERÍODO MAIOR → PERÍODO MENOR
Uma taxa de 50% a.s. equivale a quanto % ao mês?



❖ **Cálculo da Taxa Equivalente**

PERÍODO MENOR → PERÍODO MAIOR
Qual é a taxa anual equivalente a 2% ao mês?

Feedback
das aulas



<https://forms.gle/ybjnGA4nWSk9chJ7>

Fonte: A Autora (2025).



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740

Fone: (55) 2013 0200

Apêndice C: Questionário de *feedback* construído no *Google Forms*.

Feedback das aulas — 3º ano MEI, IFFar Campus Santa Rosa

Querido aluno(a)!

Ao responder este questionário, você estará contribuindo para a análise dos meus planejamentos e práticas pedagógicas, possibilitando que eu entenda a sua percepção como meu aluno(a) durante este período de estágio.

Peço para que responda com sinceridade a partir da sua experiência.

As respostas são anônimas.

Você gostou das aulas ministradas pela professora? *

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Não gostei

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Gostei muito

Como você avalia a clareza das explicações dadas durante as aulas? *

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Pouco claro / Confuso

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Muito claro

A professora incentivou a sua participação nas aulas? Como você avalia o relacionamento da professora com os alunos? *

Sua resposta



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA

Campus SANTA ROSA

Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central – Santa Rosa/RS – CEP 98787-740
Fone: (55) 2013 0200

O que você pensa sobre utilizar slides em sala de aula? *

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Não gosto

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Gosto muito

Você pensa que receber o material impresso favorece na construção do seu conhecimento? *

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Não, de
nenhuma forma

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Sim, de forma
significativa

Você pensa que haver um tempo destinado para realização de exercícios em sala de aula favorece a construção do seu conhecimento? *

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Não, de
nenhuma forma

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Sim, de forma
significativa

Como você avalia a sua participação, comprometimento e desempenho nas aulas? *

Sua resposta

Com relação às aulas desenvolvidas, você tem alguma sugestão de melhoria? *
Quais aspectos das aulas você considerou positivos? E negativos? Use esse espaço para compartilhar o seu pensamento sobre como as aulas foram conduzidas.

Sua resposta

Quais recursos que não utilizamos nas nossas aulas você gostaria que fossem utilizados nas aulas de matemática?

Sua resposta

Enviar

Limpar formulário

Fonte: A Autora (2025).